ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Часть II.

М. В. Садовский
Институт Электрофизики УрО РАН,
Екатеринбург, 620016, Россия,
E-mail: sadovski@iep.uran.ru

©М.В.Садовский, 2001

Предисловие

Излагаемый ниже материал представляет собой существенно расширенный конспект лекций, читаемых автором на физическом факультете Уральского Государственного Университета, начиная с 1991 года. Основная задача курса — познакомить студентов – теоретиков с основами современной квантовой теории поля и физики элементарных частиц. Поскольку специализация студентов в УрГУ связана, главным образом, с физикой конденсированного состояния, перед автором стояла непростая задача изложения материала в достаточно компактном и элементарном виде. В то же время, задачей курса является изложение набора сведений, которые необходимо знать, в настоящее время, каждому грамотному теоретику, даже не работающему в данной области. В известном смысле, данный курс завершает общий цикл преподавания теоретической физики.

Квантовая теория поля является, на сегодняшний день, наиболее фундаментальной теорией материи. В последние десятилетия в этой области достигнут впечатляющий прогресс, который связан с построением того, что называется "стандартной моделью" частиц и их взаимодействий. В то же время, соответствующий материал еще не очень широко известен за пределами сообщества людей, непосредственно работающих в физике частиц. С другой стороны, идеи и методы квантовой теории поля нашли очень широкое применение в теории конденсированного состояния, и без знания соответствующих принципов, трудно эффективно работать в этой области, казалось бы достаточно далекой от круга интересов теории элементарных частиц.

Имеется достаточно большое количество стандартных учебников квантовой теории поля разного уровня [1] – [12]. Особенностью большинства из них (кроме, пожалуй, довольно старых книг [5, 6]) является последовательное дедуктивное изложение предмета в рамках идеологии, наиболее близкой авторам. Отличие данного курса состоит в том, что здесь принят скорее индуктивный метод, когда одни и те же, зачастую, вопросы излагаются различными способами. Это ведет к неизбежным повторам, некоторому разнобою в обозначениях и т.п. Однако автору представляется, что такой подход более полезен с точки зрения знакомства с разнообразием идей и методов, используемых при решениии реальных задач. Для понимания большей части курса требуется знание основ квантовой механики и статистической физики. Некоторые нужные подходы, не излагающиеся в традиционных курсах квантовой механики и статистической физики, будут обсуждены по ходу дела.

При написании данных лекций автор в наибольшей степени опирался на книги [1, 8], но довольно много материала взято и из других источников, которые будут цитироваться по ходу изложения. В ряде случаев, мы стараемся проводить аналогии с известными задачами теории конденсированного состояния или приводить примеры решения конкретных задач из этой области, более близкой слушателям. При этом следует иметь в виду, что и современная теория элементарных частиц заимствовала многие идеи и методы теории конденсированного состояния, и одной из задач данного курса является демонстрация этого единства теоретической физики.

Некоторой необычностью курса, связанной с отмеченными выше его особенностями, является довольно большое число литературных ссылок. При этом имелось в виду, что наличие ссылок позволяет читателю, при желании, перейти к более углубленному рассмотрению тех или иных вопросов, тем более что чтение данных лекций не может, конечно, заменить изучения более фундаментальных учебников.

Следует, конечно, иметь в виду, что эти лекции являются изложением материала не специалистом и для не специалистов!

Центральной идеей курса является изложение основ калибровочных теорий взаимодействия элементарных частиц и основ "стандартной модели". В методическом плане достаточно подробно излагается диаграммная техника Фейнмана, значение которой выходит далеко за пределы теории элементарных частиц [13], а также формализм функционального (континуального) интегрирования, который также широко используется в настоящее время в других областях теоретической физики [14, 15]. Мы сознательно ограничиваемся этим уже достаточно традиционным материалом, составляющим основу современного понимания взаимодействий элементарных частиц. В этом смысле, излагаемый материал не нов, все эти результаты были получены примерно к середине 70-х годов. Мы сознательно оставляем за рамками изложения более современные, но и более спекулятивные вопросы, такие, скажем, как суперсимметрия. Тем более не излагаются вещи, выходящие за рамки собственно квантовой теории поля, такие как струны и суперструны. Собственно физике частиц также уделяется довольно мало места, приводятся лишь отдельные примеры расчета тех или иных простейших эффектов, с целью иллюстрации применения общих принципов теории. Хорошее изложение конкретных вопросов современной физики частиц можно найти в [16] – [17].

Разбиение курса на две части носит чисто технический характер. В первой части рассматривается лагранжев формализм, симметрии, каноническое квантование и основы квантовой электродинамики. Вторая часть посвящена функциональным методам, квантованию калибровочных полей, моделям объединенного описания взаимодействий элементарных частиц, а также более детальному рассмотрению теории перенормировок и непертурбативных методов.

М.В.Садовский, Екатеринбург, 2000 г.

.

У нас нет лучшего средства для описания элементарных частиц, чем квантовая теоря поля. Квантовое поле – это ансамбль бесконечного числа взаимодействующих гармонических осцилляторов. Возбуждения этих осцилляторов отождествляются с частицами... Все это очень в духе XIX столетия, когда люди пытались строить механические модели всех явлений. Я не вижу в этом ничего плохого, поскольку любая нетривиальная идея в определенном смысле верна. Мусор прошлого часто оказывается сокровищем настоящего (и наоборот). Поэтому мы будем смело прибегать к различным аналогиям при обсуждении наших основных проблем.

А.М.Поляков. "Калибровочные поля и струны", 1987 [24]

Содержание

1 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА 7

Формулировка квантовой механики на основе интегралов по траекториям. 7

Теория возмущений. 14

Функциональное дифференцирование. 20

Некоторые свойства функциональных интегралов. 21

2 КВАНТОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ: СКАЛЯРЫ И СПИНОРЫ 27

Производящий функционал для скалярных полей. 27

Функциональное интегрирование. 31

Функции Грина свободных частиц. 34

Производящий функционал для взаимодействующих полей. 40

Теория φ^4. 43

Производящий функционал для связных диаграмм. 50

Оператор собственной энергии и вершинные функции. 52

Теория критических явлений. 57

Фермионы и функциональные методы. 69

Пропагаторы и калибровочные условия в квантовой электродинамике. . . 75

3 КВАНТОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ: КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ 77

Неабелевы калибровочные поля и метод Фаддеева–Попова. 77

Фейнмановские диаграммы в неабелевой теории. 83

4 СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И МОДЕЛЬ ВАЙНБЕРГА-САЛАМА 91

Спонтанное нарушение симметрии и теорема Голдстоуна. 91

Калибровочные поля и эффект Хиггса. 97

Поля Янга - Миллса и спонтанное нарушение симметрии. 100

Модель Вайнберга - Салама. 105

5 ПЕРЕНОРМИРОВКА 115

Расходимости в теории φ^4. 115

Размерная регуляризация теории φ^4. 119

Перенормировка теории φ^4. 124

Ренормализационная группа. 129

Асимптотическая свобода теорий Янга–Миллса. 136
“Бегущие” константы связи и “великое объединение.” 142

6 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ 149
Теория поля на решетке. 149
Эффективный потенциал и петлевое разложение. 160
Инстантоны в квантовой механике. 165
Инстантоны и нестабильный вакуум в теории поля. 175

Глава 1

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Формулировка квантовой механики на основе интегралов по траекториям.

Хорошо известно, что квантовая механика возникла, практически одновременно, в двух эквивалентных формулировках – в виде матричной механики Гейзенберга и волновой механики, основанной на уравнении Шредингера. Существует еще одна форма построения квантовой теории, предложенная существенно позже Фейнманом [37], к краткому изложению изложению которой мы и переходим. Разумеется, все формулировки квантовой механики, по сути дела, тождественны и используются из соображений удобства при решении разных практических задач. В концептуальном плане, они выделяют отдельные стороны квантовой теории, позволяя несколько по разному проводить построение квантовой теории поля. В этом плане, формулировка Фейнмана представляется особенно изящной и удобной для последующих обобщений.

Пусть задана волновая функция частицы $\psi(q_i, t_i)$ в момент времени t_i, где q_i обозначает соответствующую координатную зависимость. Будем, для краткости, рассматривать пока одномерное движение. Тогда, как мы видели в Главе 4 части I, можно записать значение волновой функции в более поздний момент времени t_f в

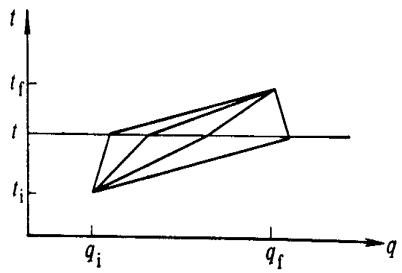


Рис. 1-1

следующем виде:

$$\psi(q_f, t_f) = \int dq_i K(q_f t_f; q_i t_i)\psi(q_i t_i) \tag{1.1}$$

где $K(q_f t_f; q_i t_i)$ соответствующий пропагатор (функция Грина уравнения Шредингера). В соответствии со стандартной интерпретацией $\psi(q_f, t_f)$ представляет собой амплитуду вероятности того, что частица находится в точке пространства q_f в момент времени t_f. Соответственно, пропагатор $K(q_f t_f; q_i t_i)$ представляет собой амплитуду вероятности перехода частицы из начальной точки q_i в момент t_i в конечную точку q_f в момент t_f. Вероятность соответствующего перехода есть:

$$P(q_f t_f; q_i t_i) = |K(q_f t_f; q_i t_i)|^2 \tag{1.2}$$

Разделим промежуток времени между моментами t_i и t_f на два промежутка, разделенные моментом t. Повторное применение (1.1) дает:

$$\psi(q_f, t_f) = \int dq_i \int dq K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i)\psi(q_i t_i) \tag{1.3}$$

так что:

$$K(q_f t_f; q_i t_i) = \int dq K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) \tag{1.4}$$

Таким образом, переход $q_i t_i \to q_f t_f$ можно рассматривать как переход через все возможные промежуточные точки (состояния), как это показано на Рис.1-1. В качестве примера можно привести известный эксперимент с дифракцией электронов на двух щелях, расположенных в точках 2A и 2B (Рис.1-2). В этом случае аналог (1.4) имеет вид:

$$K(3;1) = K(3;2A)K(2A;1) + K(3;2B)K(2B;1) \tag{1.5}$$

Распределение интенсивности на экране, расположенном в точке 3 определяется из:

$$P(3;1) = |K(3;1)|^2 \tag{1.6}$$

где, с очевидностью, присутствуют интерференционные вклады. Можно говорить, что электрон в таком эксперименте пролетает по обоим путям (траекториям) одновременно (если мы не регистрируем его в одной из щелей, но тогда и интерференционная картина исчезает!).

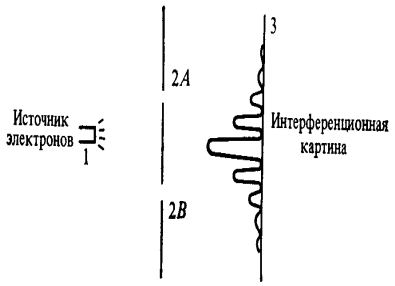


Рис. 1-2

Введем собственные вектора оператора координаты в дираковских обозначениях:

$$\hat{q}|q>=q|q> \tag{1.7}$$

Тогда волновая функция нашей частицы может быть записана как:

$$\psi(qt)=<q|\psi_t>_S \tag{1.8}$$

где $|\psi_t>_S$ – вектор состояния частицы в шредингеровском представлении, связанный с независящим от времени вектором состояния в гейзенберговском представлении $|\psi>_H$ как:

$$|\psi_t>_S=e^{-iHt/\hbar}|\psi>_H \tag{1.9}$$

Определим зависящий от времени вектор

$$|qt>=e^{iHt/\hbar}|q> \tag{1.10}$$

Тогда можно переписать (1.8) как:

$$\psi(qt)=<qt|\psi>_H \tag{1.11}$$

Все это простые и известные вещи из основ квантовой механики. Пользуясь условием полноты системы векторов (1.7), (1.10) можем теперь написать:

$$<q_f t_f|\psi>_H=\int dq_i <q_f t_f|q_i t_i><q_i t_i|\psi>_H \tag{1.12}$$

что, с учетом (1.11), сводится к:

$$\psi(q_f t_f)=\int dq_i <q_f t_f|q_i t_i>\psi(q_i t_i) \tag{1.13}$$

Сравнивая (1.13) с (1.1) видим, что пропагатор представляется в виде:

$$K(q_f t_f; q_i t_i)=<q_f t_f|q_i t_i> \tag{1.14}$$

что, фактически, в несколько иной форме, уже выписывалось нами в Главе 4 части I. Соотношением (1.14) мы будем далее широко пользоваться.

Разделим временной интервал между моментами t_i и t_f на $(n+1)$ равных частей длительностью τ. Тогда распространение частицы из $q_i t_i$ в $q_f t_f$ можно представить

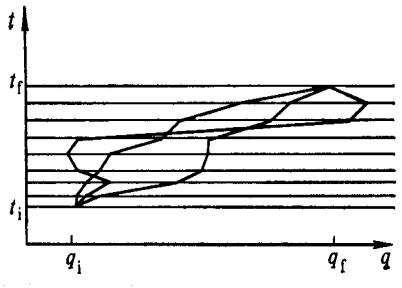


Рис. 1-3

как это показано на Рис.1-3, что с многократным использованием (1.4), позволяет записать амплитуду перехода (пропагатор) в виде:

$$< q_f t_f | q_i t_i >= \int ... \int dq_1 dq_2 ... dq_n < q_f t_f | q_n t_n >< q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} > ... < q_1 t_1 | q_i t_i > \tag{1.15}$$

где многократный интеграл берется по *всем* возможным траекториям, соединяющим начальную точку q_i с конечной q_f. В пределе $n \to \infty$ или $\tau \to 0$ выражение (1.15) определяет пропагатор как фейнмановский *интеграл по траекториям* (континуальный или функциональный интеграл). Уже на этом уровне видно основное отличие квантовой механики от классической. Классическая частица распространяется из начальной точки в конечную, двигаясь по *единственной* траектории, определяемой принципом наименьшего действия, а в квантовой механике "работает" континуум всех мыслимых траекторий, соединяющих эти точки!

Нетрудно рассчитать пропагатор на малом сегменте траектории. Из (1.10) имеем:

$$\begin{aligned} < q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j > &=< q_{j+1} | e^{-iH\tau/\hbar} | q_j > =< q_{j+1} | 1 - \frac{i}{\hbar} H\tau + O(\tau^2) | q_j > = \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} < q_{j+1} | H | q_j > = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j)\right] - \frac{i\tau}{\hbar} < q_{j+1} | H | q_j > \end{aligned} \tag{1.16}$$

где воспользовались очевидным представлением δ-функции в виде ряда Фурье. В общем случае, гамильтониан H является некоторой функцией q и p. Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай движения частицы в потенциальном поле, когда, в очевидных обозначениях, имеем:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{1.17}$$

Тогда для члена кинетической энергии можно написать:

$$< q_{j+1} | \frac{p^2}{2m} | q_j >= \int dp' \int dp < q_{j+1} | p' >< p' | \frac{p^2}{2m} | p >< p | q_j > \tag{1.18}$$

так что используя

$$< q_{j+1} | p' >= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{ip' q_{j+1}}{\hbar}\right)$$

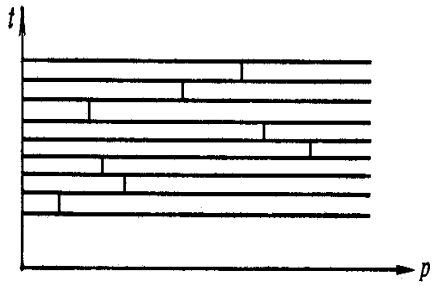


Рис. 1-4

$$< p|q_j >= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{ipq_j}{\hbar}\right)$$

получим:

$$< q_{j+1}|\frac{p^2}{2m}|q_j >= \int\int \frac{dpdp'}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p'q_{j+1} - pq_j)\right] \frac{p^2}{2m}\delta(p-p') =$$
$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] \frac{p^2}{2m} \qquad (1.19)$$

Обратим внимание, что в левой части этого выражения p представляется оператором, а в правой это уже число! Аналогичным образом нетрудно получить:

$$< q_{j+1}|V(q)|q_j >= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right) < q_{j+1}|q_j >= V\left(\frac{q_{j+1}+q_j}{2}\right)\delta(q_{j+1}-q_j) =$$
$$= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] V(\bar{q}_j) \qquad (1.20)$$

где $\bar{q}_j = \frac{1}{2}(q_{j+1} + q_j)$. Объединяя (1.19) и (1.20), имеем:

$$< q_{j+1}|H|q_j >= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right] H(p, \bar{q}) \qquad (1.21)$$

так что (1.17) переписывается в виде:

$$< q_{j+1}t_{j+1}|q_j t_j >= \int \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, \bar{q}_j)\right]\right\} \qquad (1.22)$$

где p_j – импульс в точке между t_j и t_{j+1} (между q_j и q_{j+1}). Соответствующие сегменты траектории в импульсном пространстве показаны на Рис.1-4. Выражение (1.22) и задает пропагатор на малом сегменте одного из путей (отрезке траектории). Полный пропагатор получается подстановкой (1.22) в (1.15), так что:

$$< q_f t_f|q_i t_i >= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{i=0}^{n} \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{l=0}^{n}\left[p_l(q_{l+1} - q_l) - \tau H(p_l, \bar{q}_l)\right]\right\} \qquad (1.23)$$

где $q_0 = q_i$ и $q_{n+1} = q_f$. Фактически здесь стоит бесконечнократный интеграл. Обычно (1.23) записывают в следующем символическом виде:

$$< q_f t_f|q_i t_i >= \int \frac{\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)}{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\,[p\dot{q} - H(p,q)]\right\} \qquad (1.24)$$

где $q(t_i) = q_i$ и $q(t_f) = q_f$. Эта запись, формально вводящая меру интегрирования по всем траекториям $(q(t), p(t))$ в *фазовом* пространстве частицы, не имеет никакого иного смысла, кроме введения компактной формы записи (1.23). Ситуация здесь вполне аналогична определению обычного интеграла через предел римановых сумм. Обозначение (1.24) вводит понятие *функционального* (континуального) интеграла по всем траекториям (путям) в фазовом пространстве. При этом входящие в (1.24) переменные $p(t)$ и $q(t)$ представляют собой c-числовые функции.

Определение пропагатора в виде континуального интеграла по всем траекториям в фазовом пространстве (1.24) является совершенно общим и, в частности, остается справедливым для произвольного гамильтониана $H(p, q)$. В случае гамильтониана вида (1.17) можно провести дальнейшие упрощения и перейти к представлению пропагатора в виде континуального интеграла по всем путям в обычном координатном пространстве. Для этого запишем

$$< q_f t_f | q_i t_i >= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \prod_{i=0}^{n} \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{l=0}^{n} \left[p_l(q_{l+1} - q_l) - \frac{p_l^2}{2m}\tau - V(\bar{q}_l)\tau \right] \right\} \tag{1.25}$$

Интегралы по p_j здесь легко вычисляются с помощью стандартных формул, которые будут приведены чуть ниже. В результате получаем:

$$< q_f t_f | q_i t_i >= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{j=1}^{n} dq_j \exp\left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \sum_{l=0}^{n} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{l+1} - q_l}{\tau} \right)^2 - V(\bar{q}_l) \right] \right\} \tag{1.26}$$

так что в непрерывном пределе можно записать:

$$\begin{aligned} < q_f t_f | q_i t_i >= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right] \right\} = \\ = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S \right\} \end{aligned} \tag{1.27}$$

где $L = T - V$ – классическая функция Лагранжа рассматриваемой частицы, а $S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q})$ – классическое действие, рассчитанное для произвольной траектории $q(t)$, соединяющей начальную точку $q(t_i)$ с конечной $q(t_f)$. Континуальный интеграл (1.27) берется по всем мыслимым траекториям, соединяющим начальную точку с конечной. Введенный здесь множитель $\mathcal{N}$ формально расходится в пределе $n \to \infty$, но это несущественно, поскольку, как мы увидим далее, он всегда сокращается при рассмотрении соответствующим образом нормированных амплитуд перехода.

Замечательный результат (1.27) позволяет, в частности, качественно понять физическое происхождение классического принципа наименьшего действия. В самом деле, классический предел соответствует $\hbar \to 0$. Тогда в фейнмановском интеграле (1.27) возникает континуум вкладов быстро осциллирующих множителей $\exp(iS/\hbar)$, которые в среднем "гасят" друг друга. "Выживает" при этом только вклад наиболее медленно меняющегося множителя, в котором стоит S_{min}, что и соответствует вкладу *единственной* траектории, описываемой принципом наименьшего действия классической механики и уравнениями Ньютона.

Отступление: полезные интегралы.

Приведем некоторые формулы для обычных интегралов, часто встречающихся при практических вычислениях, связанных с функциональным интегрированием. Начнем со всем известного

интеграла Пуассона – Гаусса:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{1.28}$$

Этот результат получается сразу, если заметить, что его можно переписать как:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha(x^2+y^2)} = \frac{\pi}{\alpha} \tag{1.29}$$

что, после перехода к полярным координатам в плоскости (x, y), сводится к:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr r e^{-\alpha r^2} = \pi \int_0^{\infty} d(r^2) e^{-\alpha r^2} = \frac{\pi}{\alpha} \tag{1.30}$$

Последнее равенство очевидно, что и доказывает (1.28).

Рассмотрим теперь интеграл от квадратичной формы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{q(x)} \tag{1.31}$$

где полагаем $a > 0$. Тогда имеем $q'(x) = -2ax + b,\ q''(x) = -2a,\ q'''(x) = 0...$, и мы легко находим $\bar{x}$ — значение x, при котором $q(x)$ минимальна:

$$\bar{x} = \frac{b}{2a} \qquad q(\bar{x}) = \frac{b^2}{4a} + c \tag{1.32}$$

Теперь легко представить $q(x)$ в виде (выделяя полный квадрат):

$$q(x) = q(\bar{x}) - a(x - \bar{x})^2 \tag{1.33}$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{q(x)} = e^{q(\bar{x})} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a(x-\bar{x})^2} = e^{q(\bar{x})} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{1.34}$$

так что окончательно имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx+c} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{q(x)} = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1.35}$$

Эта формула и использовалась при получении (1.26), (1.25).

Приведем еще обобщение (1.35) на случай n переменных интегрирования [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left\{ i\lambda[(x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1)^2 + ... + (b - x_n)^2] \right\} =$$

$$= \left[\frac{i^n \pi^n}{(n+1)\lambda^n}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\lambda}{n+1}(b-a)^2\right] \tag{1.36}$$

что пригодится нам в дальнейшем.

В выражении (1.27), фактически, содержится вся квантовая механика частицы, оно широко используется при решении практических задач [37]. Посмотрим, как из него можно получить обычное уравнение Шредингера. Запишем основное соотношение (1.1) в виде, связывающем волновую функцию в момент времени t_2 с ее значением в момент t_1:

$$\psi(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 K(x_2 t_2; x_1 t_1) \psi(x_1 t_1) \tag{1.37}$$

Пусть моменты t_2 и t_1 очень близки, так что $t_2 = t_1 + \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$. Тогда пропагатор определяется вкладом только одного малого сегмента траектории и, пользуясь (1.26), мы можем записать (1.37) в виде:

$$\psi(x, t+\varepsilon) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon}\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V\left(\frac{x+y}{2}, t\right)\right] \psi(y, t) dy \tag{1.38}$$

где $A = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}$. Из-за наличия первой экспоненты, существенный вклад в интеграл дают только значения y близкие к x. Сделаем замену переменной $y = x + \eta$ и перепишем (1.38) в виде:

$$\psi(x, t+\varepsilon) = A\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}\right) \exp\left[-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V\left(x+\frac{\eta}{2}, t\right)\right] \psi(x+\eta, t)d\eta \tag{1.39}$$

С учетом того, что основной вклад тут дают малые значения η, разложим обе части (1.39) в ряд:

$$\psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = A\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im\eta^2}{2\hbar\varepsilon}\right)\left[1-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x,t)\right]\left[\psi(x,t) + \eta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\eta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]d\eta \tag{1.40}$$

Учтем теперь, что

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/2\hbar\varepsilon}d\eta = 1 \tag{1.41}$$

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/2\hbar\varepsilon}\eta d\eta = 0 \tag{1.42}$$

$$A\int_{-\infty}^{\infty} e^{im\eta^2/2\hbar\varepsilon}\eta^2 d\eta = \frac{i\hbar\varepsilon}{m} \tag{1.43}$$

Тогда (1.40) сводится к:

$$\psi(x,t) + \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi - \frac{i\varepsilon}{\hbar}V\psi - -\frac{\hbar\varepsilon}{2im}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{1.44}$$

Это равенство удовлетворяется (при $\varepsilon \to 0$), если ψ удовлетворяет уравнению Шредингера для одномерного движения:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi \tag{1.45}$$

Теория возмущений.

Пусть потенциал $V(x)$ является малым возмущением. Точнее говоря, пусть мал (по сравнению с $\hbar$) интеграл по времени от $V(x,t)$. Тогда можно написать разложение:

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dtV(x,t)\right\} \approx 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dtV(x,t) - \frac{1}{2!\hbar^2}\left[\int_{t_i}^{t_f} dtV(x,t)\right]^2 + \ldots \tag{1.46}$$

Используя такое разложение в (1.27), получим разложение пропагатора $K(x_f t_f; x_i t_i)$ в ряд теории возмущений:

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \ldots \tag{1.47}$$

Член нулевого порядка представляет собой пропагатор свободной частицы:

$$K_0 = \mathcal{N}\int \mathcal{D}x \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int dt\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) \tag{1.48}$$

Чтобы сосчитать его в явном виде, вернемся к определению интеграла по траекториям (1.23) и запишем (1.48) в виде предела для многократного интеграла:

$$K_0 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}dx_j\,\exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau}\sum_{l=0}^{n}(x_{l+1}-x_l)^2\right] \tag{1.49}$$

Обозначая стоящий здесь многократный интеграл как I, вычисляем его с помощью (1.36) и получаем:

$$I = \frac{1}{(n+1)^{1/2}}\left(\frac{i2\pi\hbar\tau}{m}\right)^{n/2}\exp\left\{\frac{im}{2\hbar(n+1)\tau}(x_f-x_i)^2\right\} \tag{1.50}$$

Полагая $(n+1)\tau = t_f - t_i$, получаем из (1.49) пропагатор свободной частицы в виде:

$$K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \theta(t_f-t_i)\left(\frac{m}{i\hbar(t_f-t_i)}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im(x_f-x_i)^2}{2\hbar(t_f-t_i)}\right\} \tag{1.51}$$

где мы еще добавили множитель $\theta(t_f-t_i)$, обеспечивающий выполнение принципа причинности. Обобщение этого выражения на случай движения свободной частицы в трехмерном пространстве вполне очевидно: соответствующий пропагатор сводится к произведению пропагаторов свободного распространения (1.51) по всем трем координатным осям x, y, z.

В Главе 4 части I мы уже видели, что пропагатор частицы удовлетворяет уравнению, редставляющему собой уравнение Шредингера с δ – источником в правой части:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - H(x_f)\right]K(x_f t_f; x_i t_i) = i\hbar\delta(t_f-t_i)\delta(x_f-x_i) \tag{1.52}$$

Для случая одномерного свободного движения $H(x_f) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_f^2}$. Соответственно, свободный пропагатор удовлетворяет уравнению:

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t_f} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_f^2}\right]K_0(x_f t_f; x_i t_i) = i\hbar\delta(t_f-t_i)\delta(x_f-x_i) \tag{1.53}$$

В этом, кстати, можно убедиться непосредственной подстановкой (1.51) в в данное уравнение.

Если в (1.51) и (1.53) сделать замену $t \to -it$ и $\frac{\hbar}{2m} \to D$, то уравнение (1.53) перейдет в:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_f} - D\frac{\partial^2}{\partial x_f^2}\right]K_0(x_f t_f; x_i t_i) = \delta(t_f-t_i)\delta(x_f-x_i) \tag{1.54}$$

так что $K_0(x_f t_f; x_i t_i)$ представляет собой функцию Грина *уравнения диффузии* [32] с коэффициентом диффузии D. При этом все мнимости из (1.51) исчезают и это выражение описывает диффузию частиц из точечного источника. Фактически, континуальные интегралы по траекториям возникли впервые в теории диффузионных процессов, где они называются интегралами Винера. Исчезновение осцилляций в (1.51) (замена их на быстро затухающие экспоненты теории диффузии) чрезвычайно удобно с точки зрения численных расчетов, в частности существенно облегчаются вычисления континульных интегралов методом Монте-Карло. Вообще, формальный переход к мнимому времени часто используется при решении различных задач квантовой механики и квантовой теории поля. Ниже мы еще не раз с этим столкнемся.

Переход к мнимому времени имеет еще один аспект, даже более глубокий с точки зрения физики. Равновесная статистическая механика целиком основана на использовании канонического распределения Гиббса, когда матрица плотности системы имеет вид [35]:

$$\rho = \frac{1}{Z}e^{-\beta H} \tag{1.55}$$

где H – гамильтониан системы, Z – статистическая сумма, а $\beta = \frac{1}{T}$ – обратная температура. Легко видеть, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = -H\rho \tag{1.56}$$

Но (1.56) (называемое иногда уравнением Блоха) получается из обычного уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{1.57}$$

после формальной замены $\psi \to \rho$, $t \to -i\hbar\beta$. Поэтому можно сказать, что вся равновесная статистическая механика это та же квантовая механика в "мнимом времени". Вычисление равновесной матрицы плотности системы взаимодействующих частиц можно вести решая уравнение (1.56) и используя при этом формализм пропагаторов (функций Грина) в мнимом ("мацубаровском") времени [13]. При этом можно пользоваться и представлением этих пропагаторов в виде фейнмановских интегралов по траекториям (интегралов Винера), на основе чего можно развить соответствующий общий подход к решению задач статистической физики [38].

Перейдем теперь к вычислению K_1 – поправки первого порядка по потенциалу $V(x)$. Из (1.26) и (1.46) имеем:

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \int dx_1 ... dx_n V(x_i, t_i) \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{n} (x_{j+1} - x_j)^2\right\} \tag{1.58}$$

где мы заменили интегрирование по t суммированием по t_i. Поскольку V здесь зависит от x_i, разобьем сумму под экспонентой на две: одну от $j = 0$ до $j = i - 1$ и вторую от $j = i$ до $j = n$. Выделим также интеграл по x_i. В результате (1.58) перепишется как:

$$K_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{-i}{\hbar} \sum_{i=1}^{n} \int dx_i \left\{\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{n-i+1}{2}} \int dx_{i+1} ... dx_n \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=i}^{n} (x_{j+1} - x_j)^2\right]\right\} \times$$
$$\times V(x_i, t_i) \left\{\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\tau}\right)^{\frac{i}{2}} \int dx_1 ... dx_{i-1} \exp\left[\frac{im}{2\hbar\tau} \sum_{j=0}^{i-1} (x_{j+1} - x_j)^2\right]\right\} \tag{1.59}$$

Члены в фигурных скобках равны $K_0(x_f t_f; xt)$ и $K_0(xt; x_i t_i)$ соответственно, так что после замены $\sum_i \int dx_i$ на $\int dx \int dt$ выражение (1.59) сводится к:

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx K_0(x_f t_f; xt) V(x,t) K_0(xt; x_i t_i) \tag{1.60}$$

С учетом того, что $K_0(x_f t_f; xt) = 0$ для $t > t_f$, а $K_0(xt; x_i t_i) = 0$ для $t < t_i$, выражение (1.60) можно записать как:

$$K_1 = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx K_0(x_f t_f; xt) V(x,t) K_0(xt; x_i t_i) \tag{1.61}$$

что и дает окончательный вид поправки первого порядка к пропагатору (функции Грина) нашей частицы.

Совершенно аналогично, путем более громоздких вычислений, можно найти и поправку второго порядка:

$$K_2(x_f t_f; x_i t_i) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 K_0(x_f t_f; x_2 t_2) V(x_2 t_2) \times$$

$$\times K_0(x_2t_2;x_1t_1)V(x_1t_1)K_0(x_1t_1;x_it_i) \tag{1.62}$$

Структура членов высших порядков становится теперь очевидной. В результате получаем ряд теории возмущений для пропагатора в виде:

$$K(x_ft_f;x_it_i) = K_0(x_ft_f;x_it_i) - \frac{i}{\hbar}\int dt_1dx_1K_0(x_ft_f;xt)V(x_1,t_1)K_0(x_1t_1;x_it_i) -$$
$$-\frac{1}{\hbar^2}\int dt_1dt_2dx_1dx_2K_0(x_ft_f;x_2t_2)V(x_2t_2)K_0(x_2t_2;x_1t_1)V(x_1t_1)K_0(x_1t_1;x_it_i) + \ldots \tag{1.63}$$

что просто совпадает с аналогичным разложением, выписанным выше в Главе 4 части I. Заметим, что в выражении (1.62) отсутствует множитель $1/2!$, имеющийся в разложении (1.46). Дело здесь в том, что два взаимодействия с V в разные моменты времени неразличимы и можно написать:

$$\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}dt''V(t')V(t'') =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}dt'\int_{-\infty}^{\infty}dt''[\theta(t'-t'')V(t')V(t'') + \theta(t''-t')V(t')V(t'') =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2V(t_1)V(t_2)\theta(t_1-t_2) \tag{1.64}$$

По этой же причине в поправке произвольного порядка K_n отсутствует множитель $1/n!$. Ясно, что в разложении (1.63) содержится простейшая диаграммная техника: каждый член ряда можно легко изобразить диаграммой, если сопоставить сплошную линию пропагатору частицы, а волнистыми линиями изобразить действие потенциала в соответствующих точках пространства в соответствующие моменты времени (по которым ведется интегрирование).

Подстановка разложения (1.63) в (1.1) дает:

$$\psi(x_ft_f) = \int dx_iK(x_ft_f;x_it_i)\psi(x_it_i) =$$
$$= \int dx_iK_0(x_ft_f;x_it_i)\psi(x_it_i) -$$
$$-\frac{i}{\hbar}\int dt\int dx\int dx_iK_0(x_ft_f;xt)V(x,t)K_0(xt,x_it_i)\psi(x_it_i) + \ldots \tag{1.65}$$

Вклад невыписанных здесь членов высших порядков сводится, очевидно, к замене последнего пропагатора K_0 полным пропагатором K. Соответственно, получаем точное интегральное уравнение для волновой функции:

$$\psi(x_ft_f) = \int dx_iK_0(x_ft_f;x_it_i)\psi(x_it_i) - \frac{i}{\hbar}\int dt\int dxK_0(x_ft_f;xt)V(x,t)\psi(xt) \tag{1.66}$$

которое, конечно, вполне эквивалентно уравнению Шредингера в рассматриваемой задаче. Предполагая, что при $t_i\to-\infty$ волновая функция является решением свободного уравнения Шредингера (плоской волной!) и обозначая его как $\varphi(xt)$, можно

переписать (1.66) в виде:

$$\psi(x_f t_f) = \varphi(x_f t_f) - \frac{i}{\hbar}\int dt \int dx K_0(x_f t_f; xt) V(x,t)\psi(xt) \tag{1.67}$$

поскольку плоская волна в процессе свободного распространения остается плоской волной.

При решении практических задач часто удобнее пользоваться импульсным представлением. Пусть $K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0)$ – амплитуда вероятности того, что частица, обладавшая импульсом $\mathbf{p}_0$ в момент t_0, будет зарегистрирована в более поздний момент t_1 с импульсом $\mathbf{p}_1$. Эта амплитуда дается выражением:

$$K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) = \int d\mathbf{x}_0 \int d\mathbf{x}_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_1\mathbf{x}_1\right) K(\mathbf{x}_1 t_1; \mathbf{x}_0 t_0) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}_0\mathbf{x}_0\right) \tag{1.68}$$

где свободный пропагатор $K(\mathbf{x}_1 t_1; \mathbf{x}_0 t_0)$ для частицы, движущейся в трехмерном пространстве имеет (в соответствии с замечанием после (1.51)) вид:

$$K_0(\mathbf{x}_1 t_1; \mathbf{x}_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0)\left(\frac{m}{i\hbar(t_1 - t_0)}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{im(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right\} \tag{1.69}$$

Тогда имеем:

$$K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0)\left[\frac{m}{i\hbar(t_1 - t_0)}\right]^{3/2} \int d\mathbf{x}_0 \int d\mathbf{x}_1 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_1\mathbf{x}_1)\right] \times$$
$$\times \exp\left[\frac{im(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1)^2}{2\hbar(t_1 - t_0)}\right] \tag{1.70}$$

Введем новые переменные интегрирования:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{X} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 \tag{1.71}$$

так что $2(\mathbf{p}_0\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_1\mathbf{x}_1) = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{p}\mathbf{X}$. Якобиан этого преобразования переменных равен $(1/2)^3 = 1/8$. Соответственно, (1.70) переписывается как:

$$K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) = \theta(t_1 - t_0)\left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{8}\int d\mathbf{X} \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mathbf{p}\mathbf{X}\right) \int d\mathbf{x} \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mathbf{P}\mathbf{x}\right) e^{i\alpha}\mathbf{x}^2 \tag{1.72}$$

где $\alpha = \frac{m}{2\hbar(t_1 - t_0)}$. Первый интеграл здесь равен $8(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}) = 8(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)$, так что:

$$K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) = (2\pi\hbar)^3\theta(t_1 - t_0)\delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)\left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{3/2} \int d\mathbf{x} \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\mathbf{p}\mathbf{x} + i\alpha\mathbf{x}^2\right) \tag{1.73}$$

и используя (1.35) получаем

$$K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) = (2\pi\hbar)^3\theta(t_1 - t_0)\delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \exp\left[-\frac{i\mathbf{P}^2(t_1 - t_0)}{8m\hbar}\right] \tag{1.74}$$

где δ-функция выражает закон сохранения импульса. Учитывая теперь, что $\mathbf{P}^2 = 4\mathbf{p}_0^2$, получаем окончательно:

$$K(\mathbf{p}_1 t_1; \mathbf{p}_0 t_0) = (2\pi\hbar)^3\theta(t_1 - t_0)\delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \exp\left[-\frac{i\mathbf{p}^2(t_1 - t_0)}{2m\hbar}\right] \tag{1.75}$$

Наконец, вычислим еще и фурье-образ пропагатора по временным переменным:

$$K(\mathbf{p}_1E_1;\mathbf{p}_0E_0)=\int dt_0\int dt_1\exp\left(\frac{i}{\hbar}E_1t_1\right)K(\mathbf{p}_1t_1;\mathbf{p}_0t_0)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_0t_0\right)=$$
$$=(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\int dt_0\int dt_1\theta(\tau)\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}_1^2}{2m\hbar}\tau\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1t_1-E_0t_0)\right] \quad (1.76)$$

где ввели $\tau=t_1-t_0$. Рассматривая τ и t_0 как независимые переменные интегрирования, получим:

$$K(\mathbf{p}_1E_1;\mathbf{p}_0E_0)=(2\pi\hbar)^3\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\int_{-\infty}^{\infty}dt_0\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1-E_0)t_0\right]\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\theta(\tau)\exp\left[\frac{i}{\hbar}(E_1-\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m})\tau\right] \quad (1.77)$$

Первый интеграл здесь дает $(2\pi\hbar)\delta(E_1-E_0)$, а второй, из-за наличия $\theta(\tau)$, следует понимать как [1]:

$$\lim_{\delta\to+0}\int_0^{\infty}d\tau e^{i(E_1-\mathbf{p}_1^2/2m+i\delta)\tau/\hbar}=\frac{i\hbar}{E_1-\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}+i\delta} \quad (1.79)$$

Поэтому окончательно имеем:

$$K(\mathbf{p}_1E_1;\mathbf{p}_0E_0)=(2\pi\hbar)^4\delta(\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\delta(E_0-E_1)\frac{i\hbar}{E_1-\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}+i\delta} \quad (1.80)$$

что представляет собой фурье-образ *запаздывающей* функции Грина свободной частицы, причем δ-функции выражают законы сохранения импульса и энергии. Заметим, что полюс этого выражения, фактически, определяется кинетической энергией частицы, что является проявлением общего свойства функций Грина [13]: их полюса определяют энергетический спектр соответствующих частиц (квазичастиц).

Если ввести еще и фурье-образ потенциала, записав $V(\mathbf{x},t)$ в виде:

$$V(\mathbf{x},t)=\int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3}e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x}-\omega t)}V(\mathbf{q}\omega) \quad (1.81)$$

то ряд теории возмущений (1.63) порождает стандартную диаграммную в импульсном представлении технику для функции Грина частицы во внешнем поле [13].

[1] Фурье-образ $\theta(t)$ определяется из равенства:

$$\theta(t)=\lim_{\delta\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\frac{i}{\omega+i\delta} \quad (1.78)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, проводя интегрирование вдоль вещественной оси и замыкая контур интегрирования в верхней или нижней полуплоскости ω в зависимости от знака t.

Функциональное дифференцирование.

Запись функции Грина (пропагатора) частицы в виде фейнмановского интеграла по траекториям

$$< q_f t_f | q_i t_i >= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right] \right\} = \\ = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right\} \tag{1.82}$$

вводит в наше рассмотрение понятие *функционального интеграла*: интегрирование здесь ведется по всем *функциям* (траекториям) $q(t)$, связывающим начальную и конечную точки. Таким образом, процедура вычисления (1.82) сопоставляет всему множеству функций $q(t)$ некоторое конкретное (комплексное) *число* – амплитуду квантовомеханического перехода, стоящую в левой части. Таким образом, (1.82) является конкретной реализаций математического понятия *функционала* – отображения множества функций в множество чисел:

- *Функционал: функция* $\Rightarrow$ *число*

В отличие от этого обычная функция задает отображения одного множества чисел в другое множество чисел:

- *Функция: число* $\Rightarrow$ *число*

В частности, функционал не есть просто функция от функции (это опять просто функция!).

Обычно для функционала F от функции $f(x)$ используется обозначение $F[f(x)]$. Типичный пример функционала – определенный интеграл: $F[f(x)] = \int_a^b dx f(x)$.

Определим теперь понятие *функционального дифференцирования*. По аналогии с обычным дифференцированием, функциональная (или как ее еще называют – вариационная) производная функционала $F[f(x)]$ по функции $f(y)$ определяется как:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F[f(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - F[f(x)]}{\varepsilon}. \tag{1.83}$$

Например, для $F[f(x)]$ в виде определенного интеграла:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int dx [f(x) + \varepsilon \delta(x-y)] - \int dx f(x) \right] = \int dx \delta(x-y) = 1 \tag{1.84}$$

В качестве еще одного примера рассмотрим функционал:

$$F_x[f] = \int dy f(y) G(x,y) \tag{1.85}$$

где переменная x, от которой зависит левая часть, рассматривается как параметр. Тогда имеем:

$$\frac{\delta F_x[f]}{\delta f(z)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int dy \{ G(x,y) [f(y) + \varepsilon \delta(y-z)] \} - \int dy G(x,y) f(y) \right] = \\ = \int dy G(x,y) \delta(y-z) = G(x,z) \tag{1.86}$$

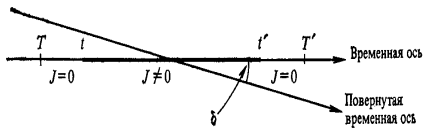


Рис. 1-5

Приведенных формул достаточно для понимания всех выражений, связанных с функциональным дифференцированием, которые будут приводиться ниже.

Некоторые свойства функциональных интегралов.

Итак, амплитуда перехода квантовой частицы из начальной точки $q_i t_i$ в конечную $q_f t_f$ равна:

$$< q_f t_f | q_i t_i >= \mathcal{N} \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) \right] \right\} =$$
$$= \mathcal{N} \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q,\dot{q}) \right\} \qquad (1.87)$$

Займемся выводом некоторых формальных соотношений, которые окажутся очень полезными при обобщении на случай квантовой теории поля. Добавим к функции Лагранжа нашей квантовой частицы дополнительный член:

$$L \rightarrow L + \hbar J(t) q(t) \qquad (1.88)$$

где $J(t)$ – некоторая произвольная функция времени, которую будем называть "источником". Будем считать, что $J(t)$ отлична от нуля на некотором интервале времен между моментами t и t' $(t < t')$, выделенном на Рис.1-5. Рассмотрим еще момент времени T, предшествующий t, а также момент T', более поздний, чем t'. Тогда амплитуда перехода системы, взаимодействующей с источником, между произвольными состояниями (точками) в эти моменты времени есть:

$$< Q'T' | QT >^J = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt L(q,\dot{q}) + \hbar J q \right\} \qquad (1.89)$$

С другой стороны, пользуясь (1.4) можем написать:

$$< Q'T' | QT >^J = \int dq' \int dq < Q'T' | q't' >< q't' | qt >^J < qt | QT > \qquad (1.90)$$

где, ввиду нашего предположения о виде $J(t)$, от источника зависит только "промежуточный" пропагатор. Используя (1.10) имеем:

$$< Q'T' | q't' >=< Q' | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} HT' \right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} Ht' \right) | q' >=$$

$$= \sum_m \varphi_m(Q')\varphi_m^*(q') \exp\left[\frac{i}{\hbar}E_m(t-T')\right] \tag{1.91}$$

где $\{\varphi_m(q)\}$ – полный набор собственных функций гамильтониана (оператора энергии). Аналогичным образом получаем:

$$< qt|QT >= \sum_n \varphi_n(q)\varphi_n^*(Q) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_n(t-T)\right] \tag{1.92}$$

Подставляя (1.91) и (1.92) в (1.90) и заменяя в этом выражении $T' \to T'e^{-i\delta}$ и $T \to Te^{-i\delta}$ ("поворачивая" ось времени на произвольный угол $\delta < \pi/2$ в комплексной плоскости, как это показано на Рис.1-5), перейдем к пределу $T' \to \infty$ и $T \to -\infty$. Тогда за счет фактора "затухания" δ в рассматриваемой амплитуде перехода (1.90) происходит уничтожение вкладов от всех состояний с $E_n > 0, E_m > 0$, а остается только вклад от $E_0 = 0$, т.е. вклад только от *основного* состояния (уровня) нашей частицы в поле $V(q)$ [2]. Тогда получаем:

$$\lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}} \lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}} < Q'T'|QT >^J = \varphi_0^*(Q)\varphi_0(Q') \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right] \times$$
$$\times \int dq' \int dq \varphi_0^*(q't') < q't'|qt >^J \varphi_0(qt) \tag{1.93}$$

или

$$\int dq' \int dq \varphi_0^*(q't') < q't'|qt >^J \varphi_0(qt) =$$
$$= \lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}} \lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}} \frac{< Q'T'|QT >^J}{\varphi_0^*(Q)\varphi_0(Q') \exp\left[-\frac{i}{\hbar}E_0(T'-T)\right]} \tag{1.94}$$

Левая часть здесь представляет собой амплитуду перехода (в присутствие источника), усредненную по основному состоянию ("вакууму") системы. Теперь можно считать, что и $t' \to \infty$, а $t \to -\infty$ и ввести для нашей усредненной амплитуды перехода (1.94) обозначение $< 0, \infty|0, -\infty >^J$, подразумевая, что она описывает переход "вакуум - вакуум" за бесконечный интервал времени. Знаменатель в правой части (1.94) есть просто число. Поэтому можем написать:

$$< 0, \infty|0, -\infty >^J \sim \lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}} \lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}} < Q'T'|QT >^J \equiv Z[J] \tag{1.95}$$

где ввели функционал источника:

$$Z[J] = \lim_{T'\to\infty e^{-i\delta}} \lim_{T\to-\infty e^{-i\delta}} \mathcal{N} \int \mathcal{D}Q(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_T^{T'} [L(Q,\dot{Q}) + \hbar JQ]\right\} \tag{1.96}$$

Заметим теперь, что вместо того, чтобы "поворачивать" временную ось в комплексной плоскости, для выделения вклада одного только основного состояния можно

[2] В этих рассуждениях важно, что собственные значения энергии всегда можно упорядочить: $E_0 < E_1 < E_2 < ... < E_n < ...$, так что описанная процедура всегда выделяет вклад состояния с наименьшей энергией, которую можно всегда положить равной нулю (но можно и сохранить в явном виде, как дающую наименее убывающий вклад). Кроме того, в рассматриваемой процедуре можно, в конце рассуждений, перейти к пределу $\delta \to +0$, чтобы не смущаться от понятия "комплексного" времени.

дописать маленькую отрицательную мнимую добавку к гамильтониану нашей системы (1.17), которую удобно записать в виде $-\frac{1}{2}i\varepsilon q^2(\varepsilon \to +0)$. Тогда все собственные значения энергии приобретут малые мнимые добавки, что приведет в пределе $T' \to \infty, T \to -\infty$ к тому же эффекту экспоненциального подавления вкладов от $E_n > 0$ [3]. В функции Лагранжа L это эквивалентно добавлению $+\frac{1}{2}i\varepsilon q^2$. Тогда можно написать:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q(t) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[L(q,\dot{q}) + \hbar J q + \frac{1}{2} i\varepsilon q^2 \right] \right\} \quad \varepsilon \to +0 \tag{1.97}$$

Оказывается, что так определенный функционал $Z[J]$ обладает целым рядом полезных и интересных свойств.

Рассмотрим вместо амплитуды перехода $< q_f t_f | q_i t_i >$ матричный элемент оператора координаты $< q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) | q_i t_i >$, где $t_f > t_{n1} > t_i$. По известным нам общим правилам можем написать:

$$< q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) | q_i t_i > = \int dq_1 ... dq_n < q_f t_f | q_n t_n >< q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} > ... \\ ... < q_{n1} t_{n1} | \hat{q}(t_{n1}) | q_{n1-1} t_{n1-1} > ... < q_1 t_1 | q_i t_i > \tag{1.98}$$

Очевидно, что

$$< q_{n1} t_{n1} | \hat{q}(t_{n1}) | q_{n1-1} t_{n1-1} > = q(t_{n1}) < q_{n1} t_{n1} | q_{n1-1} t_{n1-1} > \tag{1.99}$$

где в правой части $q(t_{n1})$ уже не оператор, а c-число (собственное значение). Далее мы можем повторить все рассуждения, проведенные выше при переходе от (1.15) к (1.24) и записать (1.98) в виде фейнмановского интеграла по траекториям:

$$< q_f t_f | \hat{q}(t_1) | q_i t_i > = \int \frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} q(t_1) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} \tag{1.100}$$

Пусть теперь нужно найти матричный элемент $< q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) \hat{q}(t_{n2}) | q_i t_i >$. Если $t_{n1} > t_{n2}$, то можно записать:

$$< q_f t_f | \hat{q}(t_{n1}) \hat{q}(t_{n2}) | q_i t_i > = \int dq_1 ... dq_n < q_f t_f | q_n t_n >< q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} > ... \\ ... < q_{n1} t_{n1} | \hat{q}(t_{n1}) | q_{n1-1} t_{n1-1} > ... < q_{n2} t_{n2} | \hat{q}(t_{n2}) | q_{n2-1} t_{n2-1} > ... < q_1 t_1 | q_i t_i > \tag{1.101}$$

что в пределе дает интеграл по траекториям вида:

$$< q_f t_f | \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_i t_i > = \int \frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} q(t_1) q(t_2) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p,q)] \right\} \tag{1.102}$$

Здесь имелось в виду, что $t_1 > t_2$. Если рассмотреть теперь случай $t_2 > t_1$, то матричные элементы координаты в моменты времени t_1 и t_2 в правой части (1.98) поменяются местами и это выражение, а с ним и интеграл в правой части (1.102), сведется к $< q_f t_f | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_i t_i >$. Таким образом, в общем случае, интеграл по

[3] Разумеется, введение здесь координатной зависимости $\sim \frac{1}{2}q^2$ совершенно несущественно для этих рассуждений. Удобство введения именно такой зависимости станет ясно чуть позже.

траекториям, стоящий в правой части (1.102) определяет матричный элемент от *хронологического* произведения операторов $< q_f t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)]|q_i t_i >$, где оператор T-упорядочения двух операторов определен как:

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{при} \quad t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1) & \text{при} \quad t_2 > t_1 \end{cases} \tag{1.103}$$

В общем случае, таким образом, имеем:

$$< q_f t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)...\hat{q}(t_n)]|q_i t_i >= \int \frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}p}{2\pi\hbar} q(t_1)q(t_2)...q(t_n) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt[p\dot{q} - H(p,q)]\right\} \tag{1.104}$$

что дает общее выражение для среднего от хронологического произведения операторов через функциональный интеграл. Для случая, когда гамильтониан задачи записывается в виде (1.17), можно провести дальнейшие упрощения и записать:

$$< q_f t_f | T[\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)...q(t_n)]|q_i t_i >= \mathcal{N}\int \mathcal{D}q q(t_1)q(t_2)...q(t_n) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt L\right\} \tag{1.105}$$

Из определения функционала $Z[J]$ (1.97) легко видеть, что его функциональная (вариационная) производная по источнику J имеет вид:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t_1)} = i\mathcal{N}\int \mathcal{D}q(t)q(t_1)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left[L(q,\dot{q}) + \hbar J q + \frac{1}{2}i\varepsilon q^2\right]\right\} \tag{1.106}$$

В общем случае:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)} = i^n\mathcal{N}\int \mathcal{D}q(t)q(t_1)...q(t_n)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left[L(q,\dot{q}) + \hbar J q + \frac{1}{2}i\varepsilon q^2\right]\right\} \tag{1.107}$$

Полагая здесь $J = 0$, получим:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)}|_{J=0} = i^n\mathcal{N}\int \mathcal{D}q(t)q(t_1)...q(t_n)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\left[L(q,\dot{q}) + \frac{1}{2}i\varepsilon q^2\right]\right\} \tag{1.108}$$

Вспоминая теперь, что член $\frac{i}{2}\varepsilon q^2$ позволяет выделить из квантовомеханических средних вклад основного состояния, и используя (1.105), приходим к следующему выражению для "вакуумного" среднего от хронологического произведения операторов:

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1)...\delta J(t_n)}|_{J=0} \sim i^n < 0,\infty|T[\hat{q}(t_1)...\hat{q}(t_n)]|0,-\infty > \tag{1.109}$$

Таким образом, многократное функциональное дифференцирование $Z[J]$ по источнику J "генерирует" средние от T-произведений квантовых операторов, причем вспомогательный источник, в конце концов, просто полагается равным нулю. Поэтому функционал $Z[J]$ можно называть *производящим функционалом* для этих средних. Заодно мы получаем и представление таких средних в виде функциональных интегралов по траекториям.

Выше мы видели, что именно вакуумные средние T-произведений полевых операторов определяют набор функций Грина в квантовой теории поля. Переход от квантовой механики к квантовой теории поля сводится к обобщению на случай

системы с бесконечным числом степеней свободы, когда операторы координат заменяются полевыми операторами в каждой точке пространства – времени. Поэтому становится ясным, что рассмотренную формулировку квантовой механики на основе интегралов по траекториям, можно использовать для непосредственного построения квантовой теории поля с использованием формализма функциональных интегралов по полевым переменным. Именно это и будет нашей задачей в следующих главах.

Глава 2

КВАНТОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ: СКАЛЯРЫ И СПИНОРЫ

Производящий функционал для скалярных полей.

Перейдем к обсуждению функциональной формулировки квантовой теории поля. Рассмотрим простейший вариант теории свободного скалярного поля $\varphi(x)$, взаимодействующего с источником $J(x)$. Непосредственно обобщая рассуждения, проведенные в предыдущей Главе, можем ввести производящий функционал:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi(x^\mu) \exp\left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\varphi) + J(x)\varphi(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)] \right\} \sim < 0, \infty | 0, -\infty >^J \tag{2.1}$$

пропорциональный амплитуде перехода вакуум – вакуум. Здесь $\mathcal{L}(\varphi)$ – лагранжиан Клейна – Гордона, и мы перешли от интегрирования по траекториям частицы к интегрированию по всем возможным конфигурациям поля[1]в пространстве

[1] В классической теории поля рассматривается только одна полевая конфигурация в пространстве – времени, а именно та, которая удовлетворяет уравнениям Лагранжа (принципу наименьшего действия). Отличие квантовой теории поля в том, что в ней "работают" все мыслимые конфигурации, но каждая из них входит в теорию с "весом" $\exp\{iS\}$, где S – классическое действие.

– времени: $\mathcal{D}q(t) \to \mathcal{D}\varphi(x^\mu)$. Смысл такого интегрирования достаточно прост. Разбиваем пространство – время на маленькие четырехмерные кубики объемом δ^4, в каждом из которых заменяем поле на константу (среднее значение внутри кубика): $\varphi \approx \varphi(x_i, y_j, z_k, t_l)$. Производные поля выражаем через конечные разности:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|_{i,j,k,l} \approx \frac{1}{\delta}[\varphi(x_i+\delta, y_j, z_k, t_l) - \varphi(x_i, y_j, z_k, t_l)] \tag{2.2}$$

и т. д. Заменяя набор (i,j,k,l) одним индексом n, нумерующим ячейки (кубики), запишем:

$$\mathcal{L}(\varphi_n, \partial_\mu\varphi_n) = \mathcal{L}_n \tag{2.3}$$

Если любой из индексов (i,j,k,l) принимает N, то индекс n принимает N^4 значений и действие записывается как:

$$S = \int d^4x\mathcal{L} = \sum_{n=1}^{N^4} \delta^4\mathcal{L}_n \tag{2.4}$$

Тогда производящий функционал $Z[J]$ приобретает вид:

$$Z[J] = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N^4} d\varphi_n \exp\left\{ i\sum_{n=1}^{N^4} \delta^4(\mathcal{L}_n + \varphi_n J_n + \frac{i}{2}\varepsilon\varphi_n^2)\right\} \tag{2.5}$$

что и определяет смысл формального выражения (2.1), вводя в теорию понятие функционального интеграла по полям (вместо траекторий квантовой механики).

Вычислим $Z[J]$ для свободного поля, когда

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) \tag{2.6}$$

– лагранжиан Клейна – Гордона. Тогда:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ i\int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - (m^2 - i\varepsilon)\varphi^2 + \varphi J)\right]\right\} \tag{2.7}$$

Дальнейшие расчеты можно провести и не вычисляя функциональный интеграл в явном виде. Воспользуемся очевидным тождеством $\partial_\mu(\varphi\partial^\mu\varphi) = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + \varphi\partial_\mu\partial^\mu\varphi$ и запишем:

$$\int d^4x\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi = \int d^4x\partial_\mu(\varphi\partial^\mu\varphi) - \int d^4x\varphi\Box\varphi \tag{2.8}$$

Тогда первый член в правой части преобразуется по теореме Гаусса в поверхностный интеграл, который можно считать равным нулю при выборе этой поверхности на бесконечности (где полагаем $\varphi \to 0$). Тогда:

$$\int d^4x\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi = -\int d^4x\varphi\Box\varphi \tag{2.9}$$

и производящий функционал переписывается как:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{ -i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J\right]\right\} \tag{2.10}$$

Подчеркнем, что поле φ в этом выражении является произвольным (переменная интегрирования!) и вовсе не удовлетворяет уравнению Клейна – Гордона. Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_0(x) + \varphi(x) \tag{2.11}$$

и воспользуемся соотношением (которое выводится аналогично (2.9)):

$$\int d^4x \varphi_0[\Box + m^2 - i\varepsilon]\varphi = \int d^4x \varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0 \tag{2.12}$$

Тогда имеем:

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J\right] \rightarrow \int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi + \right.$$
$$\left. + \varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_0(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0 - \varphi J - \varphi_0 J\right] \tag{2.13}$$

А вот теперь потребуем, чтобы поле $\varphi_0(x)$ удовлетворяло уравнению Клейна – Гордона с источником в правой части:

$$(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi_0(x) = J(x) \tag{2.14}$$

Тогда интересующий нас интеграл сводится к:

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \frac{1}{2}\varphi_0 J\right] \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.14) имеет вид:

$$\varphi_0(x) = -\int d^4y \Delta_F(x-y)J(y) \tag{2.16}$$

где $\Delta_F(x-y)$ – фейнмановский пропагатор скалярного поля, удовлетворяющий уравнению (уже встречавшемуся нам в Главе 4 части I):

$$(\Box + m^2 - i\varepsilon)\Delta_F(x) = -\delta(x) \tag{2.17}$$

Подставляя (2.16) в (2.15) видим, что показатель экспоненты в (2.10) равен:

$$-i\left\{\frac{1}{2}\int d^4x \varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi + \frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} \tag{2.18}$$

Таким образом получаем [2]:

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx \varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi\right\} \tag{2.19}$$

Но интеграл по $\mathcal{D}\varphi$ представляет собой просто число (он берется по всем мыслимым конфигурациям поля φ)! Обозначим это число $\mathcal{N}$. Тогда окончательно получаем:

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} \tag{2.20}$$

[2] Далее, для краткости, всюду пишем dx вместо d^4x и т.п.

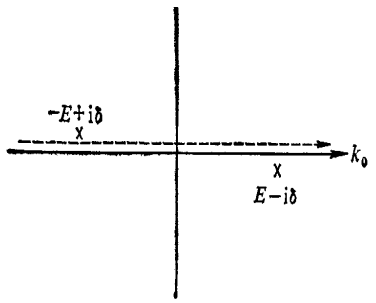


Рис. 2-1

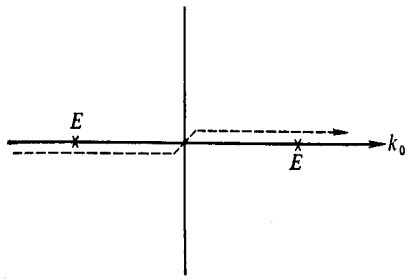


Рис. 2-2

Величина $\mathcal{N}$ особой роли не играет, это просто нормировочный множитель.

Разложение Фурье для $\Delta_F(x)$ имеет вид:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{2.21}$$

Присутствие $i\varepsilon \to i0^+$ в знаменателе диктует выбор пути интегрирования по k_0, в соответствии с фейнмановским правилом обхода полюсов при $k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Полюса располагаются в точках, определяемых уравнением: $k_0^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 - i\varepsilon$, т.е. при

$$k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \pm i\delta = \pm E \pm i\delta \tag{2.22}$$

как это показано на Рис.2-1. В пределе $\delta \to 0 (\varepsilon \to 0)$ эти полюса сдвигаются на действительную ось и путь интегрирования проходит как показано на Рис.2-2.

Выше мы видели, что такой подход соответствует "повороту" временной оси на малый угол δ в комплексной плоскости времени. Это позволяет нам правильно обеспечить граничные условия для амплитуды перехода вакуум – вакуум. Но это же можно обеспечить, осуществив такой поворот и на конечный угол равный $-\pi/2$, так что $t \to -it (\to -i\infty)$. Если ввести обозначение

$$x_4 = it = ix_0 \tag{2.23}$$

то данный предел соответствует $x_4 \to \infty$. Такое пространство – время (с мнимым временем) является *евклидовым*, инвариантный интервал (расстояние между двумя

близкими точками) в нем имеет вид:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = -\sum_{\mu=1}^{4}(dx^\mu)^2 \tag{2.24}$$

В импульсном пространстве можно, соответственно, ввести

$$k_4 = -ik_0 \tag{2.25}$$

так что

$$k^2 = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2) = -k_E^2 \qquad d^4k_E = d^3\mathbf{k}dk_4 = -id^4k \tag{2.26}$$

где индекс E обозначает евклидово импульсное пространство. При этом фейнмановский пропагатор принимает вид:

$$\Delta_F(x) = -i\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k_E^2 + m^2} \tag{2.27}$$

Заметим, что это выражение[3], с точностью до $-i$, совпадает с корреляционной функцией Орнштейна – Цернике теории критических явлений в четырехмерном пространстве [14, 15, 35], если считать, что $m^2 \sim T - T_c$, где T_c – температура фазового перехода II рода (для простоты имеем в виду область температур $T > T_c$). Здесь мы впервые сталкиваемся с глубокой связью квантовой теории поля и современной теории критических явлений (статистической физикой) [14, 15]. Из (2.7), с учетом $d^4x = -id^4x_E$ и $(\partial_\mu\varphi)^2 = -(\partial_E^\mu\varphi)^2$ получаем производящий функционал в евклидовой теории поля в виде:

$$Z_{0E}[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\int d^4x_E\left(\frac{1}{2}[(\partial_E^\mu\varphi)^2 + m^2\varphi^2] - \varphi J\right)\right\} \tag{2.28}$$

что, по сути дела, совпадает со статистической суммой *гауссовой* модели фазового перехода (т.е. теории Ландау [35] без учета членов $\sim \varphi^4$ и выше) для скалярного параметра порядка φ, взаимодействующего с внешним полем J [14, 15].

Функциональное интегрирование.

Перейдем к обсуждению функционального интегрирования с формальной точки зрения. Начнем с хорошо известной нам формулы для интеграла Пуассона – Гаусса (1.28):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{2.29}$$

Далее пределы интегрирования всегда подразумеваем от $-\infty$ до ∞ и не выписываем. Возьмем произведение n штук таких интегралов:

$$\int dx_1dx_2...dx_n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_n a_n x_n^2\right) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i^{1/2}} \tag{2.30}$$

[3]Здесь нет проблемы обхода полюсов – они лежат на мнимой оси в точках $k_4 = \pm i\sqrt{k_E^2 + m^2}$.

Пусть A – диагональная матрица с элементами $a_1, a_2, ..., a_n$, а x – n-мерный вектор (столбец) с компонентами $x_1, x_2, ..., x_n$. Тогда показатель экспоненты в (2.30) можно записать в виде скалярного произведения:

$$(x, Ax) = \sum_n a_n x_n^2 \tag{2.31}$$

а детерминант матрицы A есть:

$$DetA = a_1 a_2 ... a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \tag{2.32}$$

Тогда (2.30) запишется как:

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} = (2\pi)^{n/2} (DetA)^{-1/2} \tag{2.33}$$

Поскольку это равенство справедливо для любой диагональной матрицы, оно также справедливо и для любой действительной симметричной матрицы, поскольку всегда существует линейное преобразование, приводящее такую матрицу к диагональному виду. Определим теперь меру интегрирования как:

$$[dx] = (2\pi)^{-n/2} d^n x \tag{2.34}$$

Тогда (2.33) переписывается в виде:

$$\int [dx] e^{-\frac{1}{2}(x,Ax)} = (DetA)^{-1/2} \tag{2.35}$$

Это соотношение легко обобщается на случай, когда в экспоненте стоит квадратичная форма общего вида:

$$Q(x) = \frac{1}{2}(x, Ax) + (b, x) + c \tag{2.36}$$

Можно действовать как при выводе (1.35). Форма (2.36) достигает минимума при $\bar{x} = -A^{-1}b$ и представляется в виде:

$$Q(x) = Q(\bar{x}) + \frac{1}{2}[x - \bar{x}, A(x - \bar{x})] \tag{2.37}$$

Тогда сразу имеем аналог (1.35) в виде:

$$\int [dx] \exp\left\{ -\left[\frac{1}{2}[(x, Ax) + (b, x) + c \right] \right\} = \exp\left[\frac{1}{2}(b, A^{-1}b - c) \right] (DetA)^{-1/2} \tag{2.38}$$

где A^{-1} обозначает обратную матрицу.

Рассмотрим теперь случай эрмитовых матриц. Возведем (2.29) в квадрат и запишем:

$$\int dx dy e^{-\frac{1}{2}a(x^2+y^2)} = \frac{2\pi}{a} \tag{2.39}$$

Введем $z = x + iy$ и $z^* = x - iy$, так что (вычисляя якобиан перехода от x, y к z, z^*) имеем $dxdy = -\frac{1}{2} i dz^* dz$, после чего (2.39) записывается как:

$$\int \frac{dz^*}{(2\pi i)^{1/2}} \frac{dz}{(2\pi i)^{1/2}} e^{-az^* z} = \frac{1}{a} \tag{2.40}$$

Обобщим эту формулу, аналогично переходу от (2.30) к (2.35), введя положительно определенную эрмитову матрицу A и меру интегрирования

$$[dz] = (2\pi)^{-n/2} d^n z \tag{2.41}$$

Тогда получим:

$$\int [dz^*][dz] e^{-(z^*, Az)} = (DetA)^{-1} \tag{2.42}$$

Все выписанные формулы вполне строгие, они представляют собой прямое обобщение "одномерных" интегралов на случай конечномерного векторного пространства. Проведем теперь формальное обобщение на случай бесконечномерного функционального пространства. Пусть речь идет о пространстве действительных функций $\varphi(x^\mu)$. Можно определить их скалярное произведение:

$$(\varphi, \varphi) = \int d^4x [\varphi(x)]^2 \tag{2.43}$$

Обобщение выражения (2.35) есть:

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int dx \varphi(x) A \varphi(x)\right\} = (DetA)^{-1/2} \tag{2.44}$$

где A – некоторый оператор, действующий на функции $\varphi(x)$:

$$A\varphi(x) = \int dy A(x,y)\varphi(y) \tag{2.45}$$

а его детерминант определяется, естественно, как соответствующее произведение собственных значений. Мера интегрирования $\mathcal{D}\varphi(x) = [d\varphi(x)]$. Все это следует понимать, как обычно, в виде предельного выражения типа (2.5). Выражение (2.44) обычно называют гауссовым функциональным интегралом.

Если $\varphi(x)$ представляет собой комплексную функцию (поле), то возникает естественное обобщение (2.42):

$$\int \mathcal{D}\varphi^*(x)\mathcal{D}\varphi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int dx \varphi^*(x) A \varphi(x)\right\} = (DetA)^{-1} \tag{2.46}$$

где A – эрмитов оператор.

Обобщение (2.38) для случая вещественных полей $\varphi(x)$ имеет вид:

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) \exp\left\{-\left[\frac{1}{2}\int dx \int dy \varphi(x) A(x,y)\varphi(y) + \int dx B(x)\varphi(x) + c\right]\right\} =$$
$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\int dx \int dy B(x) A^{-1}(x,y) B(y) - c\right\} (DetA)^{-1/2} \tag{2.47}$$

где $A^{-1}(x,y)$ обозначает соответствующий обратный оператор. Для комплексных полей возникает совершенно аналогичное выражение, отличающееся от (2.47) наличием интегрирования по φ^* и φ, а также заменой $(DetA)^{-1/2}$ на $(DetA)^{-1}$.

Вернемся теперь к рассмотрению общего выражения для производящего функционала поля Клейна – Гордона (2.10):

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J\right]\right\} \tag{2.48}$$

Стоящий здесь функциональный интеграл имеет, как раз, гауссов вид (2.47), причем $A(x,y) = i(\Box + m^2 - i\varepsilon)\delta(x-y)$, $B(x) = -iJ(x)$, $c = 0$. Тогда из (2.47) получаем:

$$Z_0[J] = \exp\left\{\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)(\Box + m^2 - i\varepsilon)^{-1}J(y)\right\}[iDet(\Box + m^2 - i\varepsilon)]^{-1/2} \qquad (2.49)$$

Возникший здесь детерминант можно переписать, с помощью (2.44), как:

$$[iDet(\Box + m^2 - i\varepsilon)]^{-1/2} = \int \mathcal{D}\varphi(x)\exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx\varphi(x)(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi(x)\right\} \qquad (2.50)$$

а обратный оператор:

$$(\Box + m^2 - i\varepsilon)^{-1} = -\Delta_F(x-y) \qquad (2.51)$$

что следует непосредственно из (2.17). Тогда выражение (2.49) сводится к:

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}\int \mathcal{D}\varphi\exp\left\{-\frac{i}{2}\int dx\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi\right\} \qquad (2.52)$$

что совпадает с (2.19). Таким образом, прямое вычисление по правилам функционального интегрирования дает известный нам ответ для производящего функционала, полученный выше несколько "обходным" путем.

Полученные выше формулы для гауссовых функциональных интегралов будут широко использоваться ниже.

Функции Грина свободных частиц.

Покажем теперь, что $Z_0[J]$ является производящим функционалом для функций Грина свободных частиц. Для этого разложим (2.20) в ряд:

$$\begin{aligned} Z_0[J] = \mathcal{N}\Bigg\{1 - \frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y) + \\ + \frac{1}{2!}\left(\frac{i}{2}\right)^2\left[\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]^2 + \\ + \frac{1}{3!}\left(\frac{i}{2}\right)^3\left[\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]^3 + \ldots\Bigg\} \end{aligned} \qquad (2.53)$$

Вводя фурье - представление источника:

$$J(x) = \int d^4pJ(p)e^{-ipx} \qquad (2.54)$$

и используя (2.21) легко получаем:

$$-\frac{i}{2}\int d^4xd^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y) = -\frac{i}{2}(2\pi)^4\int d^4k\frac{J(-k)J(k)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \qquad (2.55)$$

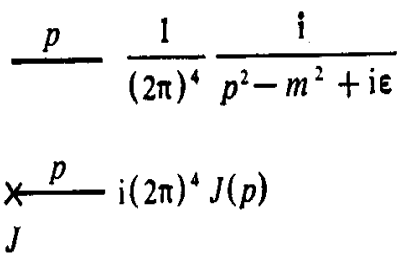


Рис. 2-3

Рис. 2-4

Сопоставим аналитическим выражениям графические элементы, как это показано на Рис.2-3. Тогда выражению (2.55) соответствует диаграмма, показанная на Рис.2-4. В результате, разложение производящего функционала (амплитуды перехода вакуум – вакуум) (2.53) представляется диаграммами, показанными на Рис.2-5[4]. Видим, что этот ряд описывает распространение 1, 2, 3 и т. д. "частиц" между источниками, так что мы имеем дело с многочастичной теорией. Уже отсюда нетрудно понять, что $Z_0[J]$ является производящим функционалом для функций Грина рассматриваемой теории поля.

Поясним формальную сторону дела. Рассмотрим, например, разложение в ряд некоторой функции $F(y_1, ..., y_k)$ от k переменных $y_1, ..., y_k$:

$$F\{y\} \equiv F(y_1, ..., y_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i1=0}^{k} ... \sum_{in=0}^{k} \frac{1}{n!} T_n(i_1, ..., i_n) y_{i1} ... y_{in} \tag{2.56}$$

где

$$T_n = \frac{\partial^n F\{y\}}{\partial y_1 ... \partial y_n}|_{y=0} \tag{2.57}$$

Перейдем теперь к интуитивному пределу, когда переменные образуют континуум: $i \to x, y_i (i = 1, ..., k) \to y(x), \sum_i \to \int dx$ и получим степенное разложение для *функционала*:

$$F[y] = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx_1 ... dx_n \frac{1}{n!} T_n(x_1, ..., x_n) y(x_1) ... y(x_n) \tag{2.58}$$

где

$$T_n(x_1, ..., x_n) = \frac{\delta}{\delta y(x_1)} ... \frac{\delta}{\delta y(x_n)} F[y]|_{y=0} \tag{2.59}$$

В этом случае о величине $F[y]$ и говорят как о производящем функционале для функций $T_n(x_1, ...x_n)$.

Наш производящий функционал $Z[J]$ надо еще отнормировать. Он, как мы видели, пропорционален амплитуде перехода вакуум - вакуум в присутствии источника J. Естественной нормировкой является условие $Z[J = 0] = 1$. Тогда можем написать равенство:

$$Z[J] =< 0, \infty | 0, -\infty >^J \tag{2.60}$$

[4]Нормировочный множитель $\mathcal{N}$ здесь опущен.

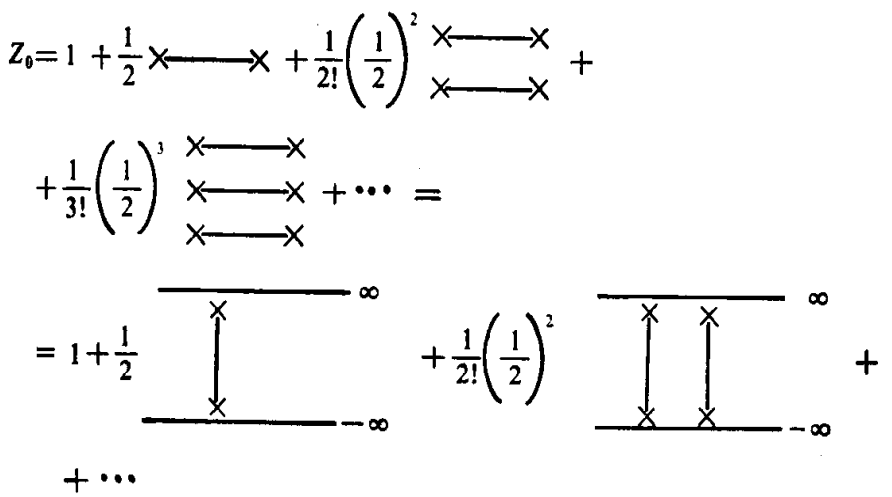


Рис. 2-5

так что условие $Z[0] = 1$ выполняется автоматически. Поэтому (2.10) и (2.20) следует переписать как:

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi - \varphi J\right]\right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-i\int d^4x \frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2 - i\varepsilon)\varphi\right\}} \tag{2.61}$$

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdyJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} \tag{2.62}$$

Эти новые определения, очевидно, удовлетворяют условию $Z[J = 0] = 1$, что и оправдывает отбрасывание несущественного нормировочного множителя $\mathcal{N}$.

Функционал $Z_0[J]$, определяемый выражением (2.62), в соответствии с (2.59), является производящим функционалом для функций:

$$\tau(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}|_{J=0} \tag{2.63}$$

Вспоминая (1.109), понимаем, что:

$$\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}|_{J=0} = i^n < 0|T\varphi(x_1)...\varphi(x_n)|0 > \tag{2.64}$$

так что

$$\tau(x_1, ..., x_n) =< 0|T\varphi(x_1)...\varphi(x_n)|0 > \tag{2.65}$$

представляет собой вакуумное среднее от хронологического произведения полевых *операторов*, т.е. является n-точечной (по числу координат) функцией Грина для рассматриваемой теории. Это определение совпадает с рассмотренным выше определением функций Грина в операторном формализме квантовой теории поля. Производящий функционал можно теперь записать в виде:

$$Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1...dx_nJ(x_1)...J(x_n)\tau(x_1, ..., x_n) \tag{2.66}$$

что и означает, что $Z_0[J]$ является производящим функционалом для функций Грина $\tau(x_1, ..., x_n)$. Именно это разложение и показано графически на Рис.2-5.

Займемся вычислением некоторых простейших n-точечных функций Грина. Напомним, что мы имеем дело со свободной теорией скалярного поля. Начнем с 2-точечной функции:

$$\tau(x, y) = -\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}|_{J=0} \tag{2.67}$$

Вычисления можно провести непосредственно, используя приведенное выше определение функциональной производной. Имеем:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp\left[-\frac{i}{2}\int dx_1 dx_2 J(x_1)\Delta_F(x_1 - x_2)J(x_2)\right] =$$
$$= -\int dx_1 \Delta_F(x - x_1)J(x_1) \exp\left[-\frac{i}{2}\int dx_1 dx_2 J(x_1)\Delta_F(x_1 - x_2)J(x_2)\right] \tag{2.68}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}Z_0[J] = i\Delta_F(x - y)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) +$$
$$+\int dx_1 \Delta_F(x - x_1)J(x_1)\int dx_1 \Delta_F(y - x_1)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) \tag{2.69}$$

где используем сокращенную запись экспоненты. Полагая теперь $J = 0$, получаем:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y)}Z_0[J]|_{J=0} = i\Delta_F(x - y) \tag{2.70}$$

или

$$\tau(x, y) = i\Delta_F(x - y) \tag{2.71}$$

Ясно, что 2-точечная функция Грина, фактически, совпадает с фейнмановским пропагатором скалярной частицы (одночастичная функция Грина свободной скалярной частицы). Но рассмотрим еще раз ее физический смысл. Проведем сначала вычисления в операторном подходе. По определению хронологического произведения имеем:

$$\tau(x, y) =< 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0 >=$$
$$=< 0|\theta(x_0 - y_0)\varphi(x)\varphi(y) + \theta(y_0 - x_0)\varphi(y)\varphi(x)|0 > \tag{2.72}$$

Первое слагаемое здесь представляет собой амплитуду вероятности рождения частицы в точке y в момент времени y_0 и ее последующего уничтожения в точке x в момент x_0. Второе слагаемое дает амплитуду вероятности рождения частицы в точке x в момент x_0 и ее уничтожения в точке y в момент времени y_0. Эти процессы графически проиллюстрированы на Рис.2-6. Сумма этих амплитуд и дает фейнмановский пропагатор. Мы знаем, что в операторном подходе поле φ можно записать в виде суммы членов с положительными и отрицательными частотами (см. Главу 3 части I):

$$\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x) \tag{2.73}$$

где

$$\varphi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}a_{\mathbf{k}}e^{-ikx} \tag{2.74}$$

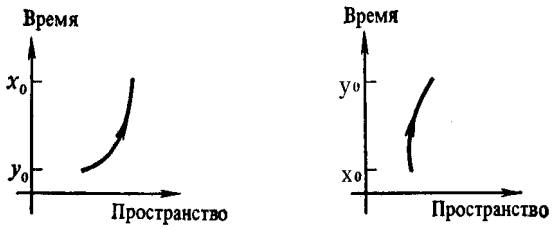


Рис. 2-6

$$\varphi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}} a^+_\mathbf{k} e^{ikx} \tag{2.75}$$

где $\omega_\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, а $a^+_\mathbf{k}, a_\mathbf{k}$ – соответствующие операторы рождения и уничтожения. С учетом смысла этих операторов, в вакуумном среднем (2.72) остаются только члены вида $\varphi^{(+)}\varphi^{(-)}$:

$$\tau(x,y) = \theta(x_0 - y_0) < 0|\varphi^{(+)}(x)\varphi^{(-)}(y)|0 > + \theta(y_0 - x_0) < 0|\varphi^{(+)}(y)\varphi^{(-)}(x)|0 > \tag{2.76}$$

Подставляя сюда (2.74) и (2.75) получаем:

$$\tau(x,y) = \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^6 \omega_\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}'}} [\theta(x_0 - y_0) e^{-i(kx - k'y')} + \theta(y_0 - x_0) e^{-i(ky - k'x)}] < 0|a_\mathbf{k} a^+_{\mathbf{k}'}|0 > \tag{2.77}$$

так что, переставляя операторы в вакуумном среднем с помощью коммутационных соотношений (так, чтобы выделить обращающийся в нуль вклад от их нормального произведения и ненулевой вклад от δ-функции), получаем:

$$\tau(x,y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \omega_\mathbf{k}} [\theta(x_0 - y_0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0 - x_0) e^{ik(x-y)}] \tag{2.78}$$

Убедимся, что это выражение просто совпадает с $i\Delta_F(x-y)$, где $\Delta_F(x-y)$ задается (2.21). Выражение (2.21) можно переписать как:

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int \frac{d^3\mathbf{k} dk_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - (\mathbf{k}^2 + m^2) + i\varepsilon} = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k} dk_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{2\omega_\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{k_0 - \omega_\mathbf{k} + i\delta} - \frac{1}{k_0 + \omega_\mathbf{k} - i\delta} \right\} \end{aligned} \tag{2.79}$$

Интеграл по k_0 тут, как всегда, можно легко вычислить контурным интегрированием. В показателе экспоненты стоит $e^{-ik_0 x_0}$, так что при $x_0 > 0$ замыкаем контур интегрирования в нижней полуплоскости k_0, и интеграл определяется вкладом от полюса при $k_0 = \omega_\mathbf{k} - i\delta$. При $x_0 < 0$ замкнем контур интегрирования в верхней полуплоскости и все определится вкладом полюса при $k_0 = -\omega_\mathbf{k} + i\delta$. Тогда, по теореме Коши, имеем:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{kx}}}{2\omega_\mathbf{k}} [\theta(x_0)(-i) e^{-i\omega_\mathbf{k} x_0} - \theta(-x_0) i e^{i\omega_\mathbf{k} x_0}] \tag{2.80}$$

После замены во втором интеграле $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ и переобозначения $x \to x-y$, получаем:

$$\Delta_F(x-y) = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{k}}} [\theta(x_0-y_0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y_0-x_0) e^{ik(x-y)}] \tag{2.81}$$

что совпадает с $-i\tau(x,y)$ из (2.78). Таким образом, 2-точечная функция Грина, возникшая в функциональном подходе, действительно, совпадает с одночастичным пропагатором операторной формулировки теории поля.

Но что представляет собой 1-точечная функция? Очевидно, что из (2.68) имеем:

$$\tau(x) =< 0|T\varphi(x)|0 >=< 0|\varphi(x)|0 >= \frac{1}{i}\frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)}|_{J=0} =$$
$$= -\int dx_1 \Delta_F(x-x_1) J(x_1) \exp\left[-\frac{i}{2}\int dx_1 dx_2 J(x_1)\Delta_F(x_1-x_2)J(x_2)\right]|_{J=0} = 0 \tag{2.82}$$

– вакуумное среднее самого поля равно нулю!

Найдем теперь 3-точечную функцию. Дифференцируя еще раз (2.69), получим:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_3)} Z_0[J] =$$
$$= -i\Delta_F(x_2-x_3)\int dx \Delta_F(x_1-x) J(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) -$$
$$-i\Delta_F(x_2-x_1)\int dx \Delta_F(x_3-x) J(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) -$$
$$-i\Delta_F(x_3-x_1)\int dx \Delta_F(x_2-x) J(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) -$$
$$-\int dx \Delta_F(x_2-x)J(x)\int dx \Delta_F(x_3-x)J(x)\int dx \Delta_F(x_1-x)J(x) exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) \tag{2.83}$$

что при $J=0$, с очевидностью, дает нуль. Таким образом:

$$\tau(x_1,x_2,x_3) =< 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)|0 >= 0 \tag{2.84}$$

Аналогичные вычисления дают:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\ldots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_4)} Z_0[J] =$$
$$= -\Delta_F(x_2-x_3)\Delta_F(x_1-x_4) exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) -$$
$$-\Delta_F(x_2-x_1)\Delta_F(x_3-x_4) exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) -$$
$$-\Delta_F(x_3-x_1)\Delta_F(x_2-x_4) exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) + \ldots \tag{2.85}$$

где многоточием обозначены члены, обращающиеся в нуль при $J=0$. Соответственно, получаем:

$$\tau(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Delta_F(x_2-x_3)\Delta_F(x_1-x_4) +$$
$$+\Delta_F(x_2-x_1)\Delta_F(x_3-x_4) + \Delta_F(x_3-x_1)\Delta_F(x_2-x_4) \tag{2.86}$$

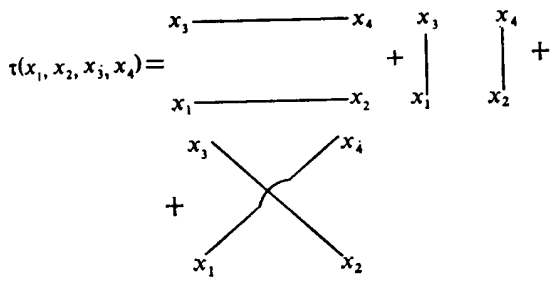


Рис. 2-7

что графически изображается диаграммами, показанными на Рис.2-7 и дает амплитуду распространения двух свободных частиц. Здесь четыре пространственно – временные точки просто соединены всеми возможными способами линиями свободных частиц.

Переходя к n-точечным функциям, нетрудно убедиться, что для нечетных n все они просто равны нулю:

$$\tau(x_1, x_2, ..., x_{2n+1}) = 0 \tag{2.87}$$

Для четных n каждая n-точечная функция факторизуется на сумму произведений 2-точечных функций (по всем "спариваниям", т.е. по всевозможным перестановкам, входящих в них попарно координат):

$$\tau(x_1, x_2, ..., x_{2n}) = \sum_P \tau(x_{p1} - x_{p2})...\tau(x_{p2k-1}, x_{p2k}) \tag{2.88}$$

где

$$\tau(x_1, x_2) = i\Delta_F(x - y) \tag{2.89}$$

Это сводится к известной нам теореме Вика, которая теперь нами доказана и в функциональной формулировке квантовой теории поля.

Производящий функционал для взаимодействующих полей.

До сих пор речь шла о теории свободного (невзаимодействующего поля). Как все это обобщить на взаимодействующие поля? Рассмотрим простейший пример такой теории, задав лагранжиан скалярного поля в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{g}{4!}\varphi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \tag{2.90}$$

где g – некоторая константа взаимодействия. Это так называемая теория $g\varphi^4$. Лагранжиан взаимодействия для нее имеет вид:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{2.91}$$

Уравнения Лагранжа для такой теории уже нелинейны (в них фигурирует слагаемое $\sim g\varphi^3$), что и отражает наличие взаимодействия (самодействия). В общем случае лагранжиан взаимодействия представляет собой некоторую функцию $V(\varphi)$. В принципе, можно рассматривать даже неполиномиальные функции, однако мы ограничимся простейшими моделями.

Отступление о размерностях констант взаимодействия.

Выше мы видели, что действие $S = \int d^4x\mathcal{L}$ безразмерно ($\hbar = 1$). Соответственно, размерность лагранжиана $[\mathcal{L}] = l^{-4}$, где l – некоторая длина. Размерность энергии (массы): $[E] = [m] = l^{-1}$. Из вида лагранжиана (2.90) понятно, что $[\varphi] = l^{-1}$. Тогда из (2.91) ясно, что в теории $g\varphi^4$ константа взаимодействия g *безразмерна*. Это очень важное обстоятельство! Благодаря ему данная теория является перенормируемой. Интуитивно, это можно понять из следующих элементарных соображений. Рассмотрим более общий степенной лагранжиан взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = g_k\varphi^{4+k} \qquad k > 0 \tag{2.92}$$

Тогда размерность соответствующей константы взаимодействия $[g_k] = l^k$. Но разложение теории возмущений всегда надо строить по безразмерному малому параметру. В данном случае таким параметром будет величина:

$$g_k l^{-k} \sim g_k m^k \sim g_k E^k \tag{2.93}$$

растущая с ростом энергии E (или на малых расстояниях). Это плохо и, как оказывается, является отражением неперенормируемости соответствующей теории. Грубо можно сказать, что безразмерность константы взаимодействия является необходимым (но не достаточным!) условием перенормируемости в любой теории взаимодействующих частиц. Точнее, необходимо, чтобы константа взаимодействия была бы безразмерной или размерность ее была бы отрицательной степенью длины: $g \sim l^{-a}, a > 0$. В последнем случае, безразмерный параметр теории возмущений gE^{-a} будет вполне безобидным при высоких энергиях. С этой точки зрения годится и теория $g\varphi^3$, но с ней другие проблемы – отсутствует положительная определенность энергии (нет основного состояния). Поэтому, теория $g\varphi^4$ является, по сути дела, единственной "разумной" теорией скалярного поля в четырехмерном пространстве – времени[5].

Для спинорного поля ($s = 1/2$) можно рассуждать также. Дираковский лагранжиан $\mathcal{L} \sim i\bar{\psi}\partial\psi - m\bar{\psi}\psi$, так что $[\psi] = [\bar{\psi}] = l^{-3/2}$. Соответственно, если рассмотреть взаимодействие дираковского поля со скалярным вида (взаимодействие Юкавы):

$$\mathcal{L}_{int} \sim g\bar{\psi}\psi\varphi \tag{2.94}$$

то соответствующая константа взаимодействия g безразмерна и теория перенормируема. А если взять четырехфермионное взаимодействие (Ферми) вида:

$$\mathcal{L}_{int} \sim G\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi \tag{2.95}$$

то константа связи G размерна: $[G] = [m^{-2}] = l^2$. Такая теория имеет "плохое" поведение при больших энергиях и является неперенормируемой.

В современной теории принято рассматривать только перенормируемые теории. Безразмерность константы связи является грубым критерием отбора возможных лагранжианов взаимодействия.

Нормированный производящий функционал для теории с взаимодействием определим также как и для невзаимодействующей теории (ср.(2.1), (2.61)):

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS + i\int dx J\varphi\right)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \tag{2.96}$$

где $S = \int d^4x\mathcal{L}$ – действие рассматриваемой теории, с учетом вклада от лагранжиана взаимодействия. При $\mathcal{L}_{int} = 0$ (2.96), естественно, сводится к рассмотренным выше выражениям для свободной теории. В общем случае имеем $S = S_0 + S_{int}$, где $S_{int} = \int d^4x\mathcal{L}_{int}$.

[5]Более подробно эти вопросы, включая зависимость от размерности пространства, будут обсуждаться позднее.

Непосредственно проводя функциональное дифференцирование, имеем:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta Z}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS + i\int dx J\varphi\right)\varphi(x)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \tag{2.97}$$

$$\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x)\delta J(y)} = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS + i\int dx J\varphi\right)\varphi(x)\varphi(y)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \tag{2.98}$$

и т. д. Полагая в этих выражениях $J = 0$ генерируем все гриновские функции теории:

$$< 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0 >= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS\right)\varphi(x)\varphi(y)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \tag{2.99}$$

$$< 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)|0 >= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(iS\right)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS}} \tag{2.100}$$

и т. д. Видим, что функции Грина представляют собой функциональные "средние" от произведений четного числа полей, причем "усреднение" проводится с "весом" e^{iS}. Если в этих выражениях записать $S = S_0 + S_{int}$ и провести разложение экспонент в ряд по степеням S_{int}, т.е., фактически в ряд теории возмущений по степеням константы взаимодействия, то пользуясь доказанной выше теоремой Вика, можно построить диаграммную технику для вычисления любых функций Грина, рассматриваемой теории поля, аналогично тому, как это делалось в операторном подходе. Возникающие при этом "средние" от парных произведений полей в разных точках будут "усредняться" с e^{iS_0}. Эти "средние" легко вычисляются (гауссовы интегралы!) и, как мы видели, сводятся к соответствующим свободным функциям Грина. Мы, однако, пойдем несколько иным, более формальным, путем, основанным на рассмотрении общих соотношений для производящего функционала взаимодействующей теории (2.96).

Заметим, что

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)} e^{i\int dx J\varphi} = \varphi(x) e^{i\int dx J\varphi} \tag{2.101}$$

Поскольку J и φ здесь независимые (функциональные) переменные, аналогичное равенство имеет место и для любой функции от φ:

$$V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) e^{i\int dx J\varphi} = V\left(\varphi(x)\right) e^{i\int dx J\varphi} \tag{2.102}$$

что легко доказывается разложением $V(\varphi)$ в ряд Тэйлора. Тогда имеем:

$$e^{-i\int dx V(\varphi)} e^{i\int dx J\varphi} = e^{-i\int dx V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} e^{i\int dx J\varphi} \tag{2.103}$$

Поэтому, используя в качестве $V(\varphi)$ лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{int}(\varphi)$, можно записать производящий функционал теории со взаимодействием в виде:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi e^{i\left\{\int dx\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}(m^2-i\varepsilon)\varphi^2 + \mathcal{L}_{int}(\varphi) + J\varphi\right]\right\}} = \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi e^{i\int dx \mathcal{L}_{int}(\varphi)} e^{i\left\{\int dx\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - (m^2-i\varepsilon)\varphi^2 + J\varphi\right]\right\}} = \\ &= \mathcal{N} e^{i\int dx \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] \end{aligned} \tag{2.104}$$

или, используя (2.20):

$$Z[J] = \mathcal{N} \exp\left[i \int dx \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] \exp\left\{-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\} \quad (2.105)$$

Таким образом, мы получили общее выражение для производящего функционала теории с взаимодействием, которое в дальнейшем будет использовано при построении диаграммной техники.

Теория φ^4.

Итак вернемся к рассмотрению теории с лагранжианом взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{4!}\varphi^4 \quad (2.106)$$

Нормированный производящий функционал для этой теории имеет вид:

$$Z[J] = \frac{\exp\left[i\int dz \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]}{\left\{\exp\left[i\int dz \mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]\right\}|_{J=0}} \quad (2.107)$$

Теория возмущений строится разложением этого выражения в ряд по степеням константы связи g. Выпишем первые члены разложения для числителя:

$$\left[1 - \frac{ig}{4!}\int dz \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 + O(g^2)\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] \quad (2.108)$$

Дифференцируя последовательно, получаем:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] =$$
$$= -\int dx \Delta_F(z-x)J(x)\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] \quad (2.109)$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] =$$
$$= \left\{i\Delta_F(0) + \left[\int dx \Delta_F(z-x)J(x)\right]^2\right\}\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] \quad (2.110)$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3\exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] =$$

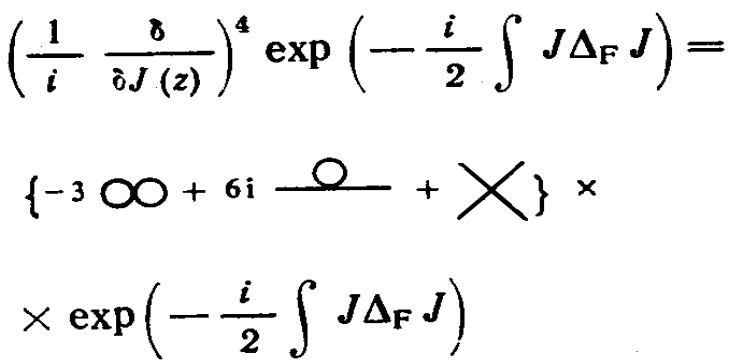


Рис. 2-8

$$= \left\{ 3[-i\Delta_F(0)] \int dx \Delta_F(z-x) J(x) - \left[\int dx \Delta_F(z-x) J(x) \right]^3 \right\} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{2} \int dx dy J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \tag{2.111}$$

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \exp\left[-\frac{i}{2} \int dx dy J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] =$$
$$= \left\{ -3[\Delta_F(0)]^2 + 6i\Delta_F(0) \left[\int dx \Delta_F(z-x) J(x) \right]^2 + \left[\int dx \Delta_F(z-x) J(x) \right]^4 \right\} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{2} \int dx dy J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right] \tag{2.112}$$

Этим выражениям можно сопоставить диаграммы. Будем изображать функцию $\Delta_F(x-y)$ (пропагатор) сплошной линией, соединяющей точки x и y. Величину $\Delta_F(0) = \Delta_F(x-x)$ будем изображать замкнутой петлей, связанной с точкой x. Тогда выражение (2.112) графически представляется, как это показано на Рис.2-8. Происхождение коэффициентов 3, 6, 1 можно понять из соображений симметрии. Например, коэффициент 3 соответствует трем способам соединить две пары линий в диаграмму с двумя петлями. Аналогично, во втором слагаемом имеется 6 способов соединить две линии, так чтобы получилась изображенная на Рис.2-8 диаграмма. Эти коэффициенты называются факторами симметрии, мы еще обсудим общий алгоритм их получения ниже. Заметим, что первый член в (2.112) и на Рис.2-8 представляет собой типичный вакуумный вклад (график) без внешних линий.

Рассмотрим теперь знаменатель (2.107). Для этого достаточно просто положить $J = 0$ в (2.112), что исключает второй и третий члены на Рис.2-8. Таким образом, с точностью до членов порядка g, производящий функционал изображается графиками Рис.2-9, где второе равенство получено разложением знаменателя с той же

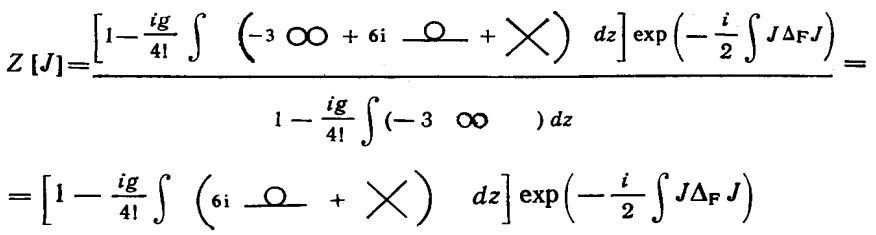


Рис. 2-9

точностью. При этом вакуумный график из знаменателя "поднялся наверх" и в точности сократился с вакуумным графиком числителя. В этом проявляется уже встречавшееся выше общее правило сокращения вакуумных графиков, которое выполняется и для *нормированных* производящих функционалов в квантовой теории поля.

2-точечная функция.

Двухточечная функция определяется как:

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}|_{J=0} \tag{2.113}$$

Из Рис.2-9 ясно, что вклад первого слагаемого функционала $Z[J]$ в выражение для $\tau(x_1, x_2)$ равен просто $i\Delta_F(x_1 - x_2)$, т.е. свободному пропагатору. Диаграмма Рис.2-9 с четырьмя "хвостами" содержит четыре множителя J и не дает $(J = 0)$ вклада в 2-точечную функцию. Вклад от диаграммы с петлей в $Z[J]$ равен:

$$\frac{g}{4}\Delta_F(0)\int dxdy\Delta_F(z-x)J(x)\Delta_F(z-y)J(y)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) \tag{2.114}$$

Дифференцируя это выражения два раза, получаем:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(...) = -\frac{ig}{4}\Delta_F(0)2\int dydz\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-y)J(y)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) + ... \tag{2.115}$$

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(...) = -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int dz\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right) + ... \tag{2.116}$$

где опущены члены, обращающиеся в нуль при $J \to 0$. В итоге, имеем:

$$\tau(x_1, x_2) = i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{g}{2}\Delta_F(0)\int dz\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2) + O(g^2) \tag{2.117}$$

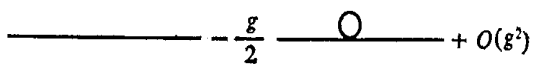


Рис. 2-10

что изображено диаграммами на Рис.2-10 Для свободной частицы имеем:

$$\tau(x) = i\Delta_F(x) = i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{2.118}$$

и фурье-образ свободного пропагатора имеет полюс при $k^2 = m^2$, что дает спектр соответствующей частицы. Нетрудно убедиться, что при наличии взаимодействия, масса частицы становится отличной от m. В самом деле, второй член на Рис.2-10 можно записать как:

$$\begin{aligned} -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int dz\Delta_F(x_1 - z)\Delta_F(x_2 - z) = \\ = -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int \frac{d^4p d^4q dz}{(2\pi)^8}\frac{e^{-ip(x_1-z)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{e^{-iq(x_2-z)}}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} = \\ = -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2}\delta(p+q) = \\ = -\frac{g}{2}\Delta_F(0)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)^2} \end{aligned} \tag{2.119}$$

так что (2.117) сводится к:

$$\tau(x_1, x_2) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\left\{1 + \frac{i}{2}g\frac{\Delta_F(0)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right\} \tag{2.120}$$

При $g \ll 1$ член в фигурных скобках в (2.120) можно переписать (с той же точностью) как:

$$\left\{1 - i\frac{g}{2}\frac{\Delta_F(0)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\right\}^{-1} \tag{2.121}$$

Соответственно:

$$\tau(x_1, x_2) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2 - m^2 - \frac{i}{2}g\Delta_F(0) + i\varepsilon} \tag{2.122}$$

Видим, что теперь фурье-образ $\tau(x_1, x_2)$ имеет полюс при:

$$p^2 = m^2 + \frac{i}{2}g\Delta_F(0) \equiv m^2 + \delta m^2 = m_r^2 \tag{2.123}$$

где

$$\delta m^2 = -\frac{i}{2}g\Delta_F(0) \tag{2.124}$$

а величина m_r представляет собой физическую (или перенормированную) массу частицы. Таким образом, взаимодействие изменяет массу. К сожалению, величина

δm^2 не может быть рассчитана, формально она бесконечна, поскольку $\Delta_F(0) \sim \int \frac{d^4k}{k^2} \sim \int dkk^3/k^2 \sim \int dkk$, и этот интеграл квадратично расходится на верхнем пределе. Это снова пример типичной "ультрафиолетовой" расходимости в квантовой теории поля. Ситуация здесь такая же, как и в квантовой электродинамике. Физическая причина расходимости – точечный характер взаимодействия (локальная теория поля). Нам неизвестно, существует – ли какой - нибудь "реалистический" механизм "обрезания" таких расходимостей. Например, в теории конденсированного состояния, в аналогичных ситуациях, верхний предел интегрирования обычно $\sim 1/a$, где a – некоторая "минимальная" длина порядка среднего межатомного расстояния или постоянной решетки. Аналог такой длины в квантовой теории поля не известен, более того, его введение (например путем введения решеточной структуры пространства - времени на малых расстояниях) явно нарушает релятивистскую инвариантность теории. Проблема решается для перенормируемых теорий, когда удается все такие расходимости "загнать" в конечное число параметров, определяемых из эксперимента (масса, константа взаимодействия и т. п.). Для перенормируемой теории $g\varphi^4$ мы еще вернемся к обсуждению этих вопросов.

4-точечная функция.

Имеем:

$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}|_{J=0} \tag{2.125}$$

Член порядка g^0 был рассмотрен выше, из (2.86) имеем:

$$\begin{aligned}\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Delta_F(x_2 - x_3)\Delta_F(x_1 - x_4) + \\ +\Delta_F(x_2 - x_1)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_3 - x_1)\Delta_F(x_2 - x_4)\end{aligned} \tag{2.126}$$

что показано графически на Рис.2-7 и соответствует свободному распространению двух частиц без всякого рассеяния. Рассмотрим вклад первого порядка по g. Из вида производящего функционала, приведенного на Рис.2-9, ясно, что один вклад такого типа, связанный с дифференцированием петлевого графика в $Z[J]$ изображается Рис.2-11 и равен:

$$\begin{aligned}\frac{g}{4}\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)} \times \\ \times\left\{\Delta_F(0)\int dx\int dy\int dz\Delta_F(x-z)\Delta_F(y-z)J(y)J(x)\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\right\}|_{J=0} = \\ = -\frac{ig}{2}\Delta_F(0)\int dz[\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) + \\ +\Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(x_2-x_4) + \Delta_F(z-x_1)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_2-x_3) + \\ +\Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(x_1-x_4) + \Delta_F(z-x_2)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_1-x_2) + \\ +\Delta_F(z-x_3)\Delta_F(z-x_4)\Delta_F(x_1-x_2)]\end{aligned} \tag{2.127}$$

что графически показано диаграммой на Рис.2-12, заменяющей шесть слагаемых данного выражения. Другой вклад первого порядка по g получается дифференци-

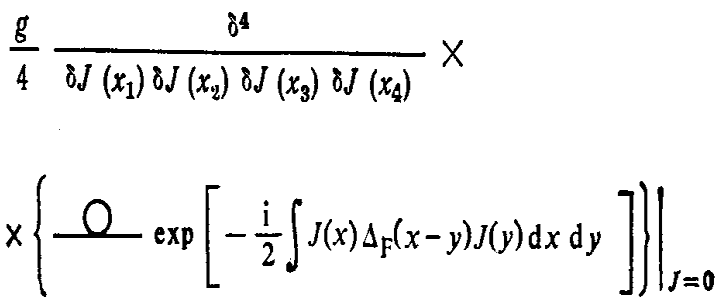


Рис. 2-11

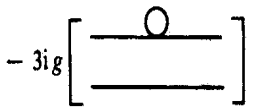


Рис. 2-12

рованием "четыреххвостого" графика в $Z[J]$, что дает:

$$-\frac{ig}{4!}\frac{\delta^4}{\delta J(x_1)...\delta J(x_4)}\left\{\left[\int dx\Delta_F(z-x)J(x)\right]^4\exp\left(-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J\right)\right\}|_{J=0}=$$
$$=-ig\int dz\Delta_F(x_1-z)\Delta_F(x_2-z)\Delta_F(x_3-z)\Delta_F(x_4-z) \tag{2.128}$$

что графически можно изобразить просто точкой с четырьмя "хвостами", где точка представляет элементарную ("затравочную") вершину взаимодействия.

Таким образом, полная 4-точечная функция, с точностью до членов порядка g, изображается графиками Рис.2-13. Здесь первый член порядка g^0, как мы уже отмечали, не дает вклада в рассеяние, второй член описывает самодействие одной из частиц, а собственно рассеяние описывается только третьим слагаемым.

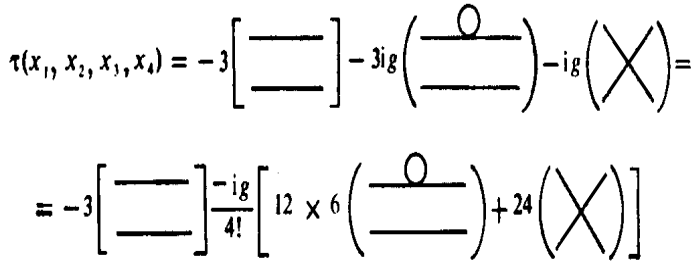


Рис. 2-13

Рис. 2-14

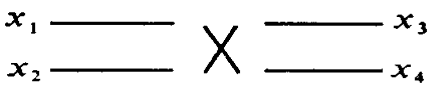


Рис. 2-15

Численные коэффициенты на Рис.2-13, и в других подобных случаях, можно понять из комбинаторных соображений. Рассмотрим произвольную диаграмму порядка g^n для 4-точечной функции. Она содержит n вершин – Рис.2-14. У 4-точечной функции имеется 4 внешних "хвоста" – Рис.2-15 (преддиаграмма). Теперь нужно всеми способами соединить эти "хвосты" с n вершинами, по правилам составления диаграмм. Например, в первом порядке по g существует три топологически различных типа фейнмановских диаграмм, показанные на Рис.2-16. Чтобы получить диаграмму Рис.2-16(а) нужно сначала соединить x_1 на преддиаграмме Рис.2-15 с одним из концов вершины. Существует 4 способа это сделать. После этого остается 3 способа соединить x_2 с одним из оставшихся концов и т. д. Всего, таким образом, имеется $4! = 24$ способа получить эту диаграмму из преддиаграммы, отсюда и возникает соответствующий коэффициент на Рис.2-13. Чтобы получить диаграмму Рис.2-16(б), соединим x_1 непосредственно с одним из внешних концов x_2, x_3, x_4, что даст одну линию. Существует 3 способа это сделать. Далее выберем один их концов вершины и соединим его с одной из двух оставшихся внешних точек. Это можно сделать 4×2 способами. Далее соединим один из трех оставшихся концов пунктирной вершины с последней оставшейся точкой. Для этого имеется 3 способа. Наконец, соединим оставшиеся два конца друг с другом. В итоге получается кратность $3 \times 4 \times 2 \times 3 = 12 \times 6$, что и соответствует коэффициенту перед этой диаграммой на Рис.2-13. Понятно, что кратность диаграммы Рис.2-16(в) равна $3 \times 3 = 9$, но эта (вакуумная) диаграмма не фигурирует на Рис.2-13, сокращаясь с соответствующим вкладом от знаменателя нормированного функционала $Z[J]$.

В итоге можем сформулировать следующие правила диаграммной техники для теории $g\varphi^4$ (в координатном представлении):

- Свободному пропагатору $\Delta_F(x-y)$ сопоставляется сплошная линия, соединяющая точки x и y.

- Элементарная вершина взаимодействия изображается точкой, соединенной с

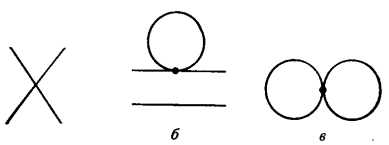


Рис. 2-16

четырьмя сплошными линиями, ей сопоставляется множитель $-ig$, а по координатам вершин ведется интегрирование.

- Каждая диаграмма умножается на соответствующий фактор симметрии $S/4!$, где S – число способов построить данную диаграмму из соответствующей предиаграммы.

Производящий функционал для связных диаграмм.

Можно ввести производящий функционал $W[J]$, который является производящим функционалом только для связных диаграмм Фейнмана, т.е. для диаграмм не распадающихся на независимые блоки[6]. Связные диаграммы важны, поскольку только они дают вклад в нетривиальную часть S-матрицы (рассеяние). Функционал $W[J]$ определяется как:

$$W[J] = -i \ln Z[J] \tag{2.129}$$

так что

$$Z[J] = \exp\left(iW[J]\right) \tag{2.130}$$

Покажем, на примере 2-точечной и 4-точечной функций, что $W[J]$ действительно "генерирует" только связные диаграммы. Имеем:

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} = \frac{i}{Z^2}\frac{\delta Z}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} \tag{2.131}$$

При $J = 0$ имеем:

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}|_{J=0} = 0 \qquad Z[0] = 1 \tag{2.132}$$

так что получаем:

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}|_{J=0} = -i\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}|_{J=0} = -i\tau(x_1, x_2) \tag{2.133}$$

Видим, что W определяет пропагатор во всех порядках по g.

Перейдем к 4-точечной функции. Продифференцируем (2.131) еще два раза и положим $J = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)} = \\
&= i\left[\frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3)\delta J(x_4)} + \frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_3)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_4)} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{Z^2}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_4)}\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_2)\delta J(x_3)} - \frac{1}{Z^2}\frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right]|_{J=0} = \\
&= i[\tau(x_1, x_2)\tau(x_3, x_4) + \tau(x_1, x_3)\tau(x_2, x_4) + \tau(x_1, x_4)\tau(x_2, x_3) - \tau(x_1, x_2, x_3, x_4)]
\end{aligned} \tag{2.134}$$

[6]Пример несвязной диаграммы показан на Рис.2-16(б).

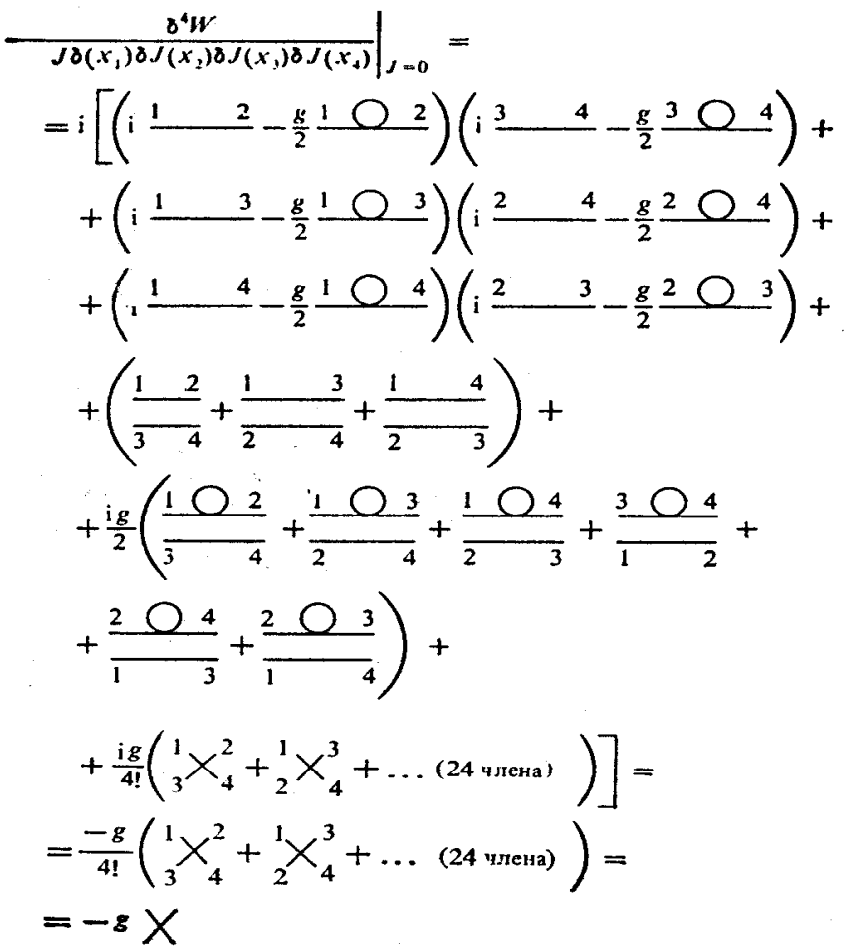


Рис. 2-17

Нетрудно видеть, что это выражение не содержит несвязных диаграмм. Подставляя (2.117) и выражения с Рис.2.128 в (2.134), с точностью до членов порядка g имеем Рис.2-17. Видим, что вклад в это выражение дают только связные диаграммы.

Рассмотрим теперь кратко n-точеченую функцию:

$$\tau(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}|_{J=0} \tag{2.135}$$

Неприводимая (связная) n-точечная функция $\varphi(x_1, ..., x_n)$ может быть определена как:

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}|_{J=0} \tag{2.136}$$

В самом деле, из Рис.2-13 и (2.135) следуют выражения, показанные на Рис.2-18. Из (2.134) следует:

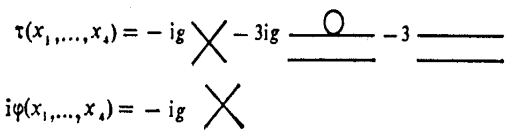


Рис. 2-18

Рис. 2-19

$$i\varphi(x_1,...,x_4) = \tau(x_1,...,x_4) - \tau(x_1,x_2)\tau(x_3,x_4) - \tau(x_1,x_3)\tau(x_2,x_4) - \tau(x_1,x_4)\tau(x_2,x_3) \tag{2.137}$$

Поскольку $\tau(x_1,x_2) = i\varphi(x_1,x_2)$, имеем:

$$\tau(x_1,...,x_4) = i\varphi(x_1,...,x_4) - \sum_p \varphi(x_{i1},x_{i2})\varphi(x_{i3},x_{i4}) \tag{2.138}$$

где сумма идет по всем возможным разбиениям индексов $(1,...,4)$ на пары $(i1,i2),(i3,i4)$. Таким образом, 4-точечная функция распадается на "неприводимую" (или "связную") часть и приводимые части, как показано на Рис.2-19. В первом порядке по g имеем графики, показанные на Рис.2-20. В случае n-точечных функций, соответствующее обобщение имеет вид, показанный на Рис.2-21.

Оператор собственной энергии и вершинные функции.

Продолжим обсуждение общей структуры уравнений квантовой теории поля в функциональной формулировке, ограничиваясь, в основном, теорией $g\varphi^4$. Зная производящий функционал $Z[J]$, можем найти n-точечные функции $\tau(x_1,...,x_n)$ (функции Грина $G^n(x_1,...,x_n)$):

$$\tau(x_1,...,x_n) = G^(n)(x_1,...,x_n) = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)}|_{J=0} \tag{2.139}$$

Эти функции содержат как связные (неприводимые), так и несвязные (приводимые) части, как это показано, например, для $G^{(4)}$ на Рис.2-22. Процессы рассеяния опре-

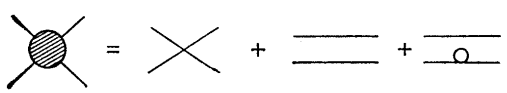


Рис. 2-20

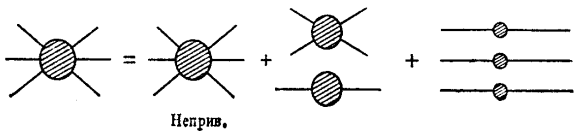


Рис. 2-21

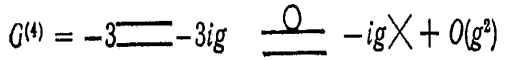


Рис. 2-22

деляются только связными диаграммами, которые генерируются функционалом $W = -i \ln Z$, так что связные функции Грина определяются как:

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = G_c^{(n)}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^{n-1}} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) ... \delta J(x_n)} |_{J=0} \qquad (2.140)$$

Тогда из всех графиков, показанных на Рис.2-22, остается только третий, который и определяет $G_c^{(4)}$ в первом порядке по g.

Связная 2-точечная функция Грина, с точностью до членов g^3, определяется графиками, показанными на Рис.2-23. Полная сумма таких диаграмм дает "одетый" пропагатор $G_c^{(2)}(x, y)$, который обычно изображают "жирной" линией. Можно провести обычную процедуру выделения *одночастично неприводимых* (1ЧН) диаграмм (неразрезаемых по линии одной частицы), и ввести их сумму, как это показано на Рис.2-24. Эта сумма определяет неприводимую собственно – энергетическую часть. Полный (одетый) пропагатор определяется тогда уравнением Дайсона:

$$G_c^{(2)}(p) = G_0(p) + G_0(p)\frac{1}{i}\Sigma(p)G_0(p) + G_0(p)\frac{1}{i}\Sigma(p)G_0(p)\frac{1}{i}\Sigma(p)G_0(p) + ... =$$
$$= G_0 \left\{ 1 + \frac{1}{i}\Sigma G_0 + \frac{1}{i}\Sigma G_0 \frac{1}{i}\Sigma G_0 + ... \right\} =$$

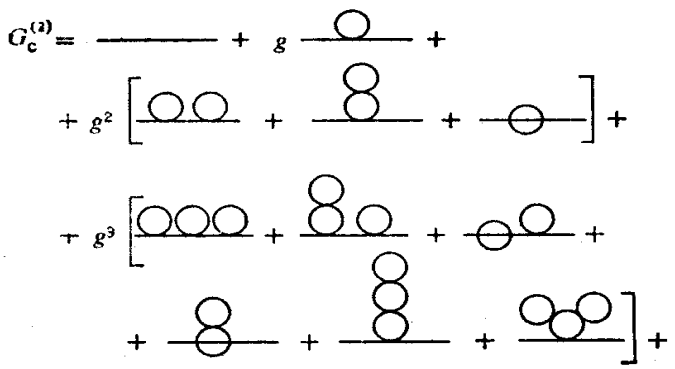


Рис. 2-23

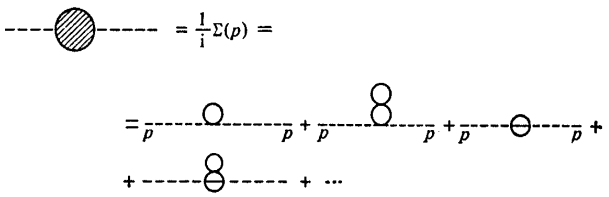


Рис. 2-24

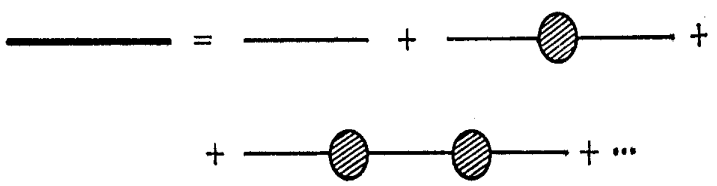


Рис. 2-25

$$= G_0 \left[1 - \frac{1}{i}\Sigma G_0\right]^{-1} = \left[G_0^{-1}(p) - \frac{1}{i}\Sigma(p)\right]^{-1} \quad (2.141)$$

или

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)} \quad (2.142)$$

где учли, что

$$G_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (2.143)$$

В диаграммном виде уравнение Дайсона показано на Рис.2-25. Определяя физическую массу частицы m_{phys} полюсом полного пропагатора [7]:

$$G_c^{(2)} = \frac{i}{p^2 - m_{phys}^2} \quad (2.144)$$

получаем:

$$m_{phys}^2 = m^2 + \Sigma(p^2 = m_{phys}^2) \quad (2.145)$$

Из (2.141) имеем:

$$[G_c^{(2)}(p)]^{-1} = G_0^{-1}(p) - \frac{1}{i}\Sigma(p) \quad (2.146)$$

так что величина, обратная 2-точечной функции, содержит кроме обратного "голого" пропагатора только 1ЧН-диаграммы. Можно формально определить 2-точечную *вершинную* функцию $\Gamma^{(2)}(p)$ соотношением:

$$G_c^{(2)}(p)\Gamma^{(2)}(p) = i \quad (2.147)$$

[7] Энергетический спектр свободно распространяющейся "одетой" частицы определяется из $p^2 = m_{phys}^2$.

что, согласно (2.146), сводится к:

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p) \tag{2.148}$$

Фактически, нетривиальная часть этой величины сводится просто к $\Sigma(p)$, но такое обозначение удобно в рамках некоторой единой номенклатуры, вводящей общее понятие вершинных функций[8].

Можно ввести понятие производящего функционала для n-точечных 1ЧН-неприводимых вершин Γ^n. Он обозначается $\Gamma[\varphi]$ и называется также *эффективным действием*. Определяется этот функционал с помощью так называемого преобразования Лежандра функционала $W[J]$:

$$W[J] = \Gamma[\varphi] + \int dx J(x)\varphi(x) \tag{2.149}$$

Отсюда сразу же следует:

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \varphi(x) \qquad \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = -J(x) \tag{2.150}$$

Тогда для пропагатора получаем:

$$G(x,y) = -\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = -\frac{\delta \varphi(x)}{\delta J(y)} \tag{2.151}$$

Определим теперь величину $\Gamma(x,y)$ как:

$$\Gamma(x,y) = \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\varphi(y)} \tag{2.152}$$

Эта величина является обратной к пропагатору:

$$\begin{aligned}\int dx G(x,z)\Gamma(z,y) &= -\int dz \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(y)} = \\ &= \int dz \frac{\delta\varphi(x)}{\delta J(z)}\frac{\delta J(z)}{\delta\varphi(y)} = \frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \delta(x-y)\end{aligned} \tag{2.153}$$

Продифференцируем обе части (2.153) по $J(x'')$, заменив y на z, и с учетом соотношения:

$$\frac{\delta}{\delta J(x'')} = \int dz'' \frac{\delta\varphi(z'')}{\delta J(x'')}\frac{\delta}{\delta\varphi(z'')} = -\int dz'' G(x'',z)\frac{\delta}{\delta\varphi(z'')} \tag{2.154}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}&\int dz \frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')} - \\ -\int dz \int dz'' &\frac{\delta^2 W}{\delta J(x)\delta J(z)} G(x'',z'')\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')} = 0\end{aligned} \tag{2.155}$$

[8] Удобно исключить мнимую единицу из определения $G_c^{(2)}(p)$, так чтобы правая часть (2.147) равнялась просто 1. Соответственно и в уравнении Дайсона $\frac{1}{i}\Sigma \to \Sigma$. Такие обозначения чаще всего и встречаются в литературе.

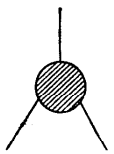


Рис. 2-26

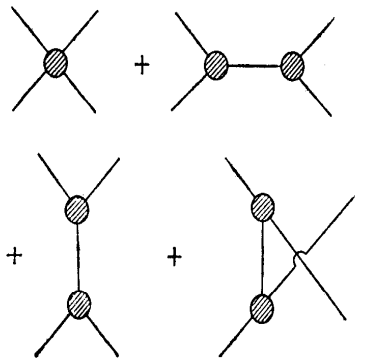


Рис. 2-27

так что:

$$\int dz \frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x'')\delta J(z)}\Gamma(z,z') + \\ + \int dz dz'' G(x,z)G(x'',z'')\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')} \tag{2.156}$$

Умножая обе части последнего равенства на $G(x',z')$ и интегрируя по z', с учетом (2.153), получаем:

$$\frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x')\delta J(x'')} = -\int dz dz' dz'' G(x,z)G(x',z')G(x'',z'')\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')} \tag{2.157}$$

Таким образом, связная 3-точечная функция представляет собой 1ЧН-неприводимую 3-точечную вершинную функцию, у которой внешними линиями являются точные пропагаторы. Соответственно, величина $\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(z')\delta\varphi(z'')}$ представляет собой полную тройную вершину. Графически все это изображено на Рис.2-26. Уравнение (2.157) можно обратить с помощью (2.153), так что:

$$\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\varphi(y)\delta\varphi(y')\delta\varphi(y'')} = -\int dx dx' dx''\Gamma(x,y)\Gamma(x',y')\Gamma(x'',y'')\frac{\delta^3 W}{\delta J(x)\delta J(x')\delta J(x'')} \tag{2.158}$$

В правой части происходит "обрубание" внешних "хвостов" у (2.157).

Дифференцируя (2.157) еще раз, получаем 4-точечную функцию, представленную графиками Рис.2-27, где возникают "четыреххвостая" неприводимая вершина и три одночастично приводимых вклада, соответствующие трем кросс-каналам рассеяния.

Термодинамическая аналогия.

Существует глубокая аналогия квантовой теории поля и статистической механики, которая выражается следующей таблицей.

Квантовая теория поля	Статистическая механика
Z - производящий функционал	Z - статистическая сумма
$Z = e^{iW}$	$Z = e^{-\frac{F}{T}}$
$W[J] = \Gamma[\varphi] + \int J\varphi$	F – свободная энергия

В следующем разделе мы рассмотрим конкретный пример использования методов квантовой теории поля в применении к теории критических явлений при фазовых переходах II рода.

Теория критических явлений.

Отвлечемся на короткое время от задач квантовой теории поля и рассмотрим один из самых ярких примеров применения соответствующих методов в задачах статистической физики. Речь пойдет о критических явлениях вблизи точки фазового перехода II рода. Эта проблема в течение длительного времени не поддавалась решению. Суть ее известна – в достаточно узкой (критической) области температур вблизи температуры перехода T_c критические индексы, описывающие особенности физических величин в точке перехода *не описываются* общей теорией Ландау [35]. Причина этого также хорошо известна – вблизи точки перехода в системе развиваются мощные *флуктуации* параметра порядка, которые *сильно* взаимодействуют между собой [14, 35]. Существенный прогресс теории был связан с возникновением важной концепции масштабной инвариантности или *скэйлинга* [14, 39]. Однако обоснование этой концепции и расчет величины критических индексов потребовали развития методов, целиком основанных на аппарате квантовой теории поля, что и привело к созданию современной флуктуационной теории фазовых переходов [14, 15, 39]. Достаточно подробное изложение этой теории потребовало бы отдельного курса лекций. Здесь мы дадим предельно сжатое изложение лишь основных идей и ряда результатов, хорошо иллюстрирующих не раз упоминавшуюся глубокую аналогию задач квантовой теории поля и статистической физики. При этом будут опускаться многие существенные детали вычислений.

Запишем функционал свободной энергии теории Ландау в стандартном виде [14, 15, 39][9]:

$$\frac{1}{T}F[\phi(r)] = \int d^d r \left\{ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \left[(\nabla\phi_j)^2 + \tau\phi_j^2 \right] + \frac{1}{8} g \left(\sum_{j=1}^{n} \phi_j^2 \right)^2 \right\} \qquad (2.159)$$

где T – температура, а параметр $\tau = \frac{T-T_c}{T_c}$ задает близость системы к точке фазового перехода. Мы ограничимся рассмотрением только области температур $T > T_c$ (симметричная фаза). Параметр порядка ϕ_j представляет собой n-компонентный вектор в некотором "изотопическом" пространстве с размерностью n. Выражение (2.159) является весьма общим. Фактически речь идет о $O(n)$-симметричной (изотропной) модели фазового перехода, описывающей целый ряд реальных систем. Случай $n = 1$ соответствует модели Изинга, $n = 2$ соответствует XY-модели

[9] Сразу ведем рассмотрение в пространстве произвольно размерности d, имея в виду существенную зависимость критических явлений от размерности пространства [35, 14].

(сверхтекучесть, сверхпроводимость), $n = 3$ описывает изотропный гейзенберговский ферромагнетик и т. д. [14, 39].

В рамках теории Ландау, пренебрегающей флуктуациями параметра порядка (теория самосогласованного или "молекулярного" поля), величина $\phi = 0$ при $T > T_c$ [35]. Однако и при $T > T_c$ в системе могут флуктуационно возникать области с $\phi(r) \neq 0$. Вероятность таких флуктуаций определяется [14, 35] как:

$$\mathcal{P}[\phi(r)] = \frac{1}{Z} \exp\left\{-\frac{1}{T} F[\phi(r)]\right\} \tag{2.160}$$

где статистическая сумма Z определяется функциональным интегралом:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi(r) \exp\left\{-\frac{1}{T} F[\phi(r)]\right\} \tag{2.161}$$

Свободная энергия системы в целом при этом равна:

$$F = -T \ln Z \tag{2.162}$$

Корреляционная функция параметра порядка определяется как:

$$G_{jl}(r, r') = Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi(r)\phi_j(r)\phi_l(r') \exp\left\{-\frac{1}{T} F[\phi(r)]\right\} \equiv < \phi_j(r)\phi_l(r') > \tag{2.163}$$

Аналогия с рассмотрением предыдущих разделов очевидна – теория критических явлений эквивалентна *евклидовой* квантовой теории n-компонентного скалярного поля в d-мерном пространстве. Выражение (2.163) является просто пропагатором (функций Грина, 2-точечной функцией) такой теории поля. В простейшем варианте гауссовой модели критических явлений мы уже сталкивались с такой теорией в связи с (2.28).

Теория возмущений по константе взаимодействия флуктуаций g строится вполне аналогично тому, как это было сделано выше для теории $g\varphi^4$ с однокомпонентным скалярным полем. Свободная функция Грина совпадает с коррелятором Орнштейна – Цернике (ср.(2.27)):

$$G_{0jl} = \frac{\delta_{jl}}{p^2 + \tau} \tag{2.164}$$

Корреляционная функция взаимодействующих флуктуаций определяется уравнением Дайсона:

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) - \Sigma(p) \tag{2.165}$$

где собственно – энергетическая часть $\Sigma(p)$ представляется графиками Рис.2-28. Вершинная часть (полная "четыреххвостка") определяет 4-точечный коррелятор $< \phi_i(r_1)\phi_j(r_2)\phi_l(r_3)\phi_m(r_4) >$ и т. д.

Нетривиальная физика критических явлений связана с взаимодействием флуктуаций. Рассмотрим первые поправки теории возмущений к "затравочному" взаимодействию, определяемому константой g. На Рис.2-29 изображены графики $\sim g^2$, соответствующие трем кросс – каналам двухчастичного рассеяния, определяемым тремя суммарными импульсами[10]:

[10] Стрелки на линиях определяют направления входящих и выходящих импульсов.

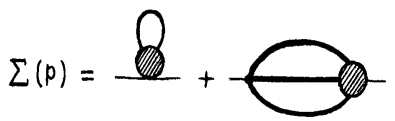


Рис. 2-28

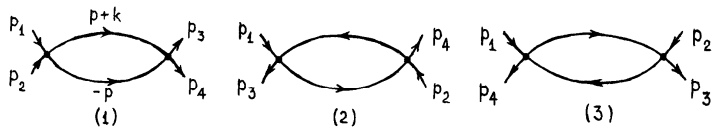


Рис. 2-29

1. $p_1 + p_2$
2. $p_1 - p_3$
3. $p_1 - p_4$

Естественно, имеется общий закон сохранения:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \tag{2.166}$$

В задаче с n-компонентным полем удобно воспользоваться симметризованной (по "изотопическим" индексам) записью "затравочного" взаимодействия:

$$\bullet = g(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \equiv g I_{ijkl} \tag{2.167}$$

Тогда член взаимодействия в (2.159) $\sim I_{ijkl}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l$, где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

Для нахождения полной вершины двухчастичного рассеяния нужно просуммировать все графики типа показанных на Рис.2-30. Естественно, что в общем виде эта задача не решается. Однако, можно провести некоторую топологическую классификацию диаграмм, которая позволяет сформулировать общую систему, так называемых "паркетных", интегральных уравнений, которая определяет полную вершину взаимодействия[11]. Ясно, что полную вершину Γ можно представить в виде:

$$\Gamma = R + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 \tag{2.168}$$

где блоки $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ построены из диаграмм, которые можно разрезать по двум линиям в каналах 1,2,3, а блок R состоит из всех диаграмм, которые нельзя разрезать ни по одному из этих каналов. Тогда для блоков $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ можно составить графические уравнения, показанные на Рис.2-31. В этих уравнениях выделены блоки:

$$I_i = R + \sum_{j \neq i} \Gamma_j \tag{2.169}$$

неразрезаемые по двум линиям в канале i. Структура диаграмм, определяющих блок R ясна из диаграмм, показанных на Рис.2-32.

[11] И.Т.Дятлов, В.В.Судаков, К.А.Тер- Мартиросян. ЖЭТФ **32**, 767 (1957).

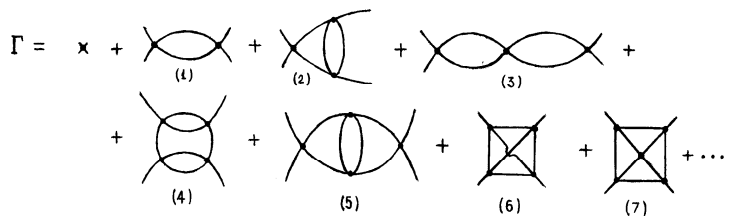


Рис. 2-30

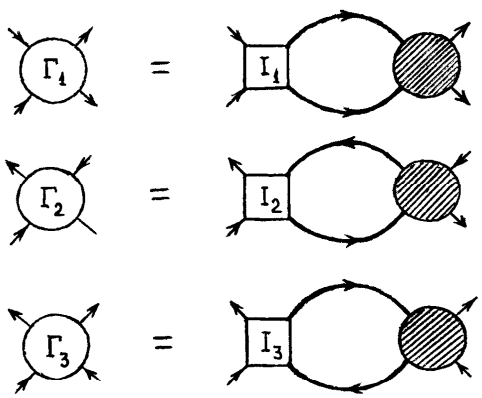


Рис. 2-31

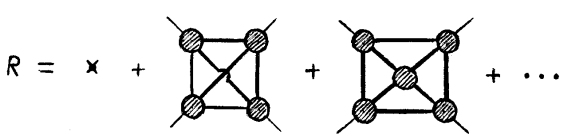


Рис. 2-32

Полученная система интегральных уравнений очень сложна. Тем не менее существует ситуация, когда она решается достаточно просто. Речь идет о так называемом приближении "главных логарифмов". Чтобы понять основную идею, оценим величину диаграммы 1 на Рис.2-29[12]. В аналитическом виде этот график определяется интегралом:

$$g^2(n+8)\int \frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+\tau}\frac{1}{(p+k)^2+\tau} \tag{2.170}$$

Происхождение множителя $n+8$ связано с произведением двух факторов (2.167), стоящих в вершинах:

$$I_{ijmn}I_{mnkl}+I_{ikmn}I_{mnjl}+I_{ilmn}I_{mnjk}=(n+8)(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.171}$$

Рассмотрим теперь нашу теорию в четырехмерном пространстве $d=4$. Тогда имеем следующую оценку интеграла:

$$\int d^4p\frac{1}{p^2+\tau}\frac{1}{(p+k)^2+\tau}\sim\int_{Max(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda}\frac{dpp^3}{p^4}\sim\int_{Max(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda}\frac{dp}{p}\sim\ln\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})} \tag{2.172}$$

где ввели параметр обрезания $\Lambda\sim\frac{1}{a}$. Здесь, в отличие от квантовой теории поля, нет проблем с логарифмической расходимостью на верхнем пределе – разложение Ландау (2.159) применимо только на масштабах длины, существенно превышающих межатомное расстояние, флуктуаций параметра порядка с меньшими длинами волн просто нет. Величина a играет роль "минимальной длины", отсутствующей в квантовой теории поля. Тем не менее, факт логарифмической расходимости (2.172) очень важен. Этот логарифм велик в интересующей нас области параметров, вблизи точки фазового перехода, когда речь идет о $k,\sqrt{\tau}\ll\Lambda$. Существенна "инфракрасная" расходимость при τ или k стремящихся к нулю! В самом деле, с точностью до членов второго порядка по g, мы теперь имеем:

$$\Gamma(k)\approx g-g^2(n+8)\ln\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})}+... \tag{2.173}$$

Видим, что первая поправка к вершине взаимодействия при $\tau\to 0$, $k\to 0$ может существенно превышать затравочную константу g – взаимодействие флуктуаций растет по мере приближения системы к точке перехода. В этом и есть проблема! Нужно суммировать все существенные поправки, а это не просто сделать. Для пространства $d=3$ задача вообще кажется безнадежной, однако для $d=4$, благодаря относительно слабой логарифмической расходимости, можно провести определенный отбор графиков, соответствующий упомянутому приближению "главных логарифмов". Дело в том, что логарифм у нас появляется от интегрирования по импульсам в петлевом графике. Поэтому в высших порядках будут возникать логарифмы в более высокой степени, причем эта степень равна числу петель в соответствующем графике. Например, аналогичная оценка графиков 2 и 3 на Рис.2-30 дает для них величину $\sim g^3\ln^2\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})}$, а для графика 4 получаем $\sim g^4\ln^3\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})}$. В тоже время оценка графика 6 дает $\sim g^4\ln\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})}$, а для графика 7 имеем $\sim g^5\ln\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})}$, что заведомо меньше вкладов 2,3,4 в силу предположения слабости исходного взаимодействия $g\ll 1$. Поэтому можно ограничиться

[12] В дальнейшем мы, по большей части, опускаем несущественные численные множители типа факторов симметрии и т. п.

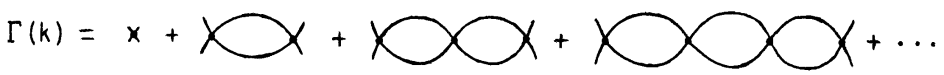


Рис. 2-33

"главными логарифмами", т.е. отбирать только те графики, у которых степень логарифма только на единицу меньше степени константы связи g, на Рис.2-30 это графики 2,3,4. Их топология ясна – они содержат максимально нарастающее число петель типа Рис.2-29. Именно такой набор графиков чаще всего называют "паркетом". "Паркет" учитывает все поправки к вершине $\sim g^n \ln^n$, но пренебрегает всеми вкладами $\sim g^{n+k} \ln^n$. Тем более можно пренебречь вкладами без логарифмов. В частности, введенный выше блок R сводится тогда лишь к первому члену Рис.2-32, т.е. просто к затравочному взаимодействию g. В таком приближении "паркетные" уравнения Рис.2-31 удается решить. Процедура решения, однако, довольно сложна и мы не будем на ней останавливаться. Дело в том, что правильный ответ для полной вершины получается и при более "наивном" рассмотрении, которым мы и воспользуемся.

Рассмотрим простую последовательность графиков, показанную на Рис.2-33. Это обычная прогрессия, которая легко суммируется (в отличие от двумерного "паркета"):

$$\Gamma(k) = g - g^2(n+8)\ln\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})} + g^3(n+8)^2\ln^2\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})} + \ldots = \frac{g}{1+g(n+8)\ln\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})}} \qquad (2.174)$$

Решение "паркетных" уравнений дает точно такой же ответ (если внешние импульсы вершины одного порядка)[13]. Дело в том, что "паркетные" уравнения для такой вершины сводятся к дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{d\Gamma(s)}{ds} = -(n+8)\Gamma^2(s) \qquad (2.175)$$

с граничным условием $\Gamma(s) \to g$ при $s \to 0$, и введена логарифмическая переменная:

$$s = \ln\frac{\Lambda}{Max(k,\sqrt{\tau})} \qquad (2.176)$$

Интегрирование (2.175) тогда дает:

$$\Gamma(k) = \frac{g}{1+g(n+8)s} \qquad (2.177)$$

что совпадает с (2.174). Фактически, этот результат вполне аналогичен выражениям для физического заряда, полученным в Главе 8 части I при изучении асимптотических свойств квантовой электродинамики и ведущих к проблеме "московского

[13]Совпадение с правильным ответом здесь является довольно случайным и, конечно же, не отменяет необходимости более строгого решения, впервые выполненного в цитировавшейся выше работе Дятлова, Судакова и Тер-Мартиросяна.

нуля"[14].

Рассмотрим случай $k = 0$ (взаимодействие флуктуаций с предельно длинными волнами). Тогда (2.174) сводится к:

$$\Gamma(k=0) = \frac{g}{1 + g(n+8)\ln\frac{\Lambda}{\sqrt{\tau}}} \to \frac{1}{(n+8)\ln\frac{\Lambda}{\sqrt{\tau}}} \qquad \text{при} \quad \tau \to 0 \tag{2.178}$$

Видим, что при приближении к точке фазового перехода зависимость от "затравочной" константы связи g пропадает, а само эффективное взаимодействие *стремится к нулю* (типичный "нуль-заряд"!) [15]. Но здесь это не вызывает проблем, как в релятивистской теории поля, а наоборот, полностью проясняет ситуацию. В самом деле, результат (2.178) означает эффективное ослабление взаимодействия флуктуаций по мере приближения к точке перехода. Можно непосредственно рассчитать влияние такого слабого взаимодействия на все физические величины, имеющие особенность в точке перехода и убедиться, что оно приводит только к незначительным (логарифмическим) температурным поправкам к критическому поведению, следующему из теории Ландау. Эти логарифмические поправки не меняют *степени* температурных особенностей, т.е. критические индексы. Поэтому для $d = 4$ критические индексы просто равны критическим индексам теории Ландау!

Отступление: определение критических индексов.

В теории критических явлений вводится следующий стандартный набор характеристик системы и их критических индексов, определяющих сингулярности этих величин в точке фазового перехода в зависимости от параметра $\tau = \frac{T - T_c}{T_c} \to 0$.

Параметр порядка:

$$\bar{\varphi} \sim |\tau|^{\beta} \quad T \to T_c - 0 \tag{2.179}$$

$$\bar{\varphi} \sim h^{\frac{1}{\delta}} \quad T = T_c \tag{2.180}$$

где h – внешнее поле, сопряженное параметру порядка. Восприимчивость:

$$\chi \sim \begin{cases} \tau^{-\gamma} & T \to T_c + 0 \\ |\tau|^{-\gamma'} & T \to T_c - 0 \end{cases} \tag{2.181}$$

Корреляционная функция параметра порядка (d – размерность пространства):

$$G(r) \sim \frac{\exp(-r/\xi)}{r^{d-(2-\eta)}} \tag{2.182}$$

где корреляционная длина:

$$\xi \sim \begin{cases} \tau^{-\nu} & T \to T_c + 0 \\ |\tau|^{-\nu'} & T \to T_c - 0 \end{cases} \tag{2.183}$$

В самой критической точке:

$$G(r) \sim \frac{1}{r^{d-(2-\eta)}} \tag{2.184}$$

$$G(p) \sim \frac{1}{k^{2-\eta}} \tag{2.185}$$

Аналогичным образом вводится критический индекс теплоемкости α:

$$C(\tau, h=0) = \frac{A^+}{\alpha}[\tau^{-\alpha} - 1] + B^+ \quad T \to T_c + 0 \tag{2.186}$$

$$C(\tau, h=0) = \frac{A^-}{\alpha'}[|\tau|^{-\alpha'} - 1] + B^- \quad T \to T_c - 0 \tag{2.187}$$

[14] Результат типа (2.174) впервые был получен из "паркетных" уравнений также при исследовании асимптотических свойств в теории релятивистского скалярного поля $g\varphi^4$. В теории критический явлений при $d = 4$ он был использован существенно позже Ларкиным и Хмельницким.

[15] Подчеркнем, что в теории критических явлений имеем $g > 0$, так что никаких проблем, типа "ложных" полюсов здесь не возникает.

при этом $\alpha = 0$ соответствует логарифмической особенности. Напомним, что здесь мы рассматриваем только симметричную фазу ($T > T_c$), в которой среднее значение параметра порядка $\bar{\varphi} = 0$. Обобщение на случай $T < T_c$ проводится без особых проблем.

Важно отметить, что полученные в рамках теории Ландау (или метода молекулярного поля) стандартные значения критических индексов [35]:

$$\nu = \frac{1}{2} \quad \gamma = 1 \quad \eta = 0$$
$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \delta = 3 \tag{2.188}$$

удовлетворяют стандартным скейлинговым соотношениям [14, 35]

$$\nu = \frac{\gamma}{2 - \eta} \tag{2.189}$$
$$\alpha = 2 - \nu d \tag{2.190}$$
$$\beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta) \tag{2.191}$$

если в них положить размерность пространства $d = 4$. В этом смысле можно сказать, что теория Ландау дает правильное описание критических явлений для размерности пространства $d = 4$. Это же утверждение остается справедливым и для всех $d > 4$ – нетрудно видеть, что поправки типа (2.170) не приводят ни к каким расходимостям для $d > 4$, а потому малы в силу предположения $g \ll 1$. Размерность пространства $d = 4$ называется *верхней критической размерностью* теории.

Для физически интересного случая $d = 3$ не удается провести отбор доминирующих диаграмм в ряду теории возмущений, все диаграммы оказываются одного порядка. В этом и была основная трудность при построении теории критических явлений. Вильсон предложил оригинальный метод расчета критических индексов, основанный на теории возмущения по искусственно определенному малому параметру $\varepsilon = 4 - d$ – отклонению от верхней критической размерности пространства $d = 4$, при которой индексы совпадают с предсказываемыми теорией среднего поля (ε – разложение). Идея введения "дробной" размерности пространства довольно проста. Во всех фейнмановских интегралах выше фигурировало интегрирование по объему d-мерного импульсного пространства, элемент объема которого в сферических координатах, для подинтегральной функции, зависящей только от модуля импульса, записывается в виде:

$$d^d p = \Omega_d p^{d-1} dp \tag{2.192}$$

где Ω_d – поверхность единичной d-мерной сферы:

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \tag{2.193}$$

где использовано обычное обозначение Γ-функции. В этом выражении уже можно считать d произвольным (нецелым) вещественным параметром. Тогда можно записать:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ldots = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int dp p^{d-1} \ldots = K_d \int dp p^{d-1} \ldots \tag{2.194}$$

где введено стандартное обозначение:

$$K_d = 2^{-(d-1)}\pi^{-d/2}\left[\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\right]^{-1} \tag{2.195}$$

В частности $K_4 = (8\pi^2)^{-1}$. Выше, при оценке (2.172) эта константа просто опускалась. Дальше мы также не будем ее выписывать.

Проведем теперь снова оценку вклада диаграммы 1 с Рис.2-29, имея в виду пространство с $d = 4 - \varepsilon$. Вместо (2.172) имеем:

$$g^2(n+8)K_d \int_{Max(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} dp p^{d-1}\frac{1}{p^4} \sim g^2(n+8)\int_{Max(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} dp p^{d-5} \sim$$
$$\sim g^2(n+8)\frac{1}{d-4}p^{d-4}|_{Max(k,\sqrt{\tau})}^{\Lambda} \sim g^2(n+8)\frac{1}{\varepsilon}\left[Max(k,\sqrt{\tau})^{-\varepsilon} - \Lambda^{-\varepsilon}\right] \tag{2.196}$$

Все изменение по сравнению со случаем $d = 4$ состоит в том, что вместо логарифма (2.172) возникает "логарифмическая переменная":

$$s = \frac{1}{\varepsilon}\left[Max(k,\sqrt{\tau})^{-\varepsilon} - \Lambda^{-\varepsilon}\right] \tag{2.197}$$

переходящая в тот же логарифм в пределе $\varepsilon \to 0$. Поэтому мы снова, при решении "паркетных" уравнений, можем воспользоваться приближением "главных логарифмов", а дифференциальное уравнение для вершины (2.175) сохраняет свой вид. Его решение (2.177) для случая $k = 0$ в пространстве $d = 4 - \varepsilon$ записывается теперь как:

$$\Gamma(k=0) = \frac{g}{1 + g(n+8)\frac{1}{\varepsilon}[\tau^{-\varepsilon/2} - \Lambda^{-\varepsilon}]} \to$$
$$\to \frac{1}{(n+8)\frac{1}{\varepsilon\tau^{\varepsilon/2}}} = \frac{\varepsilon\tau^{\varepsilon/2}}{(n+8)} \qquad \text{при} \quad \tau \to 0 \tag{2.198}$$

Видим, что эффективное взаимодействие флуктуаций оказывается малым по введенному нами искусственному параметру $\varepsilon = 4 - d$.

Уравнение (2.175) можно также рассматривать как дифференциальное уравнение *по параметру обрезания* Λ, входящему в переменную s (2.197), (2.176): $ds = \Lambda^{-(1+\varepsilon)}d\Lambda$. Это уравнение тогда описывает перенормировку вершины Γ при инфинитезимальном преобразовании параметра обрезания $\Lambda \to \Lambda' = \Lambda + d\Lambda$. По сути дела это есть дифференциальное уравнение ренорм - группы (группы перенормировок) Гелл-Манна и Лоу, уже известное нам из квантовой электродинамики. Идеология ренорм - группы является основой современной теории фазовых переходов [14, 15, 40].

Перейдем к схематическому описанию расчета критических индексов. Рассмотрим корреляционную функцию параметра порядка (функцию Грина) $G(p\tau)$. Имеем, по определению:

$$G(p = 0\tau) = \chi(\tau) \sim \tau^{-\gamma} \tag{2.199}$$
$$G(p\tau = 0) \sim p^{-2+\eta} \tag{2.200}$$

Ограничимся определением именно индексов γ и η, поскольку остальные можно определить, пользуясь скэйлинговыми соотношениями типа (2.191) [14, 39].

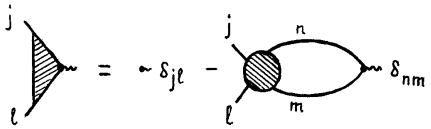


Рис. 2-34

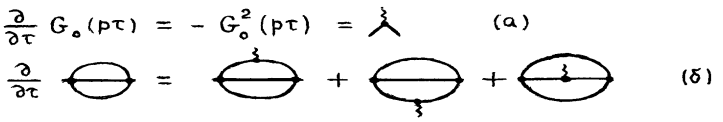


Рис. 2-35

В рассматриваемой теории можно доказать два тождества Уорда:

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha} G^{-1}_{jl}(p\tau = 0) = 2p_\alpha \delta_{jl} - 2\int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} p'_\alpha G^2_{mm}(p'0)\Gamma_{jlmm}(ppp'p') \tag{2.201}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G^{-1}_{jl}(p\tau = 0) = \delta_{jl} - \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} G^2_{mm}(p'0)\Gamma_{jlmm}(ppp'p') \tag{2.202}$$

Введя "треугольную" вершину $\mathcal{T}_{jl} = \frac{\partial}{\partial \tau} G^{-1}_{jl}(p\tau = 0)$ можно второе из этих тождеств изобразить графически, как показано на Рис.2-34. Это тождество можно вывести последовательным дифференцированием графиков для для собственно - энергетической части (обратного пропагатора), как это показано схематически на Рис.2-35. Дифференцирование обратного свободного пропагатора (2.164) (Рис.2-35(а)) дает первое слагаемое, а дифференцирование простейшего вклада в собственно - энергетическую часть (Рис.2-35(а)) дает вклады низшего порядка для вершины с двумя соединенными "хвостами", т.е. низший вклад во второе слагаемое. Полный ряд "продифференцированных" графиков собирается в полную вершину. Тождество (2.201) выводится аналогично, дифференцированием по p_α.

Подставим в (2.201) "паркетное" решение для $\Gamma(ppp'p')$. Мы его не находили, но достаточно сказать, что оно (подобно выписанному выше решению для $\Gamma(k)$) зависит только от модулей $|p|$ и $|p'|$, так что интеграл в правой части (2.201) обращается в нуль при интегрировании по полярному углу. Поэтому имеем просто:

$$\frac{\partial G^{-1}(p\tau = 0)}{\partial p_\alpha} = 2p_\alpha \tag{2.203}$$

так что

$$G(p\tau = 0) \sim \frac{1}{p^2} \tag{2.204}$$

что дает значение индекса $\eta = 0$.

Воспользуемся теперь тождеством (2.202). В "паркетном" приближении можно определенным образом пересуммировать графики так, что это тождество превращается в интегральное уравнение для "треугольной" вершины, показанное на Рис.2-36. С использованием логарифмических переменных это уравнение записывается как:

$$\mathcal{T}_{jl}(s) = \delta_{jl} - \int_0^s dt \Gamma_{jlmn}(t)\mathcal{T}_{mn}(t) \tag{2.205}$$

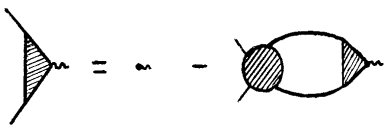


Рис. 2-36

Используя $\mathcal{T}_{jl} = \mathcal{T}\delta_{jl}$ и (2.167) получаем:

$$I_{jlmn}\delta_{mn} = (n+2)\delta_{jl} \tag{2.206}$$

и (2.205) сводится к:

$$\mathcal{T}(s) = 1 - (n+2)\int_0^s dt\Gamma(t)\mathcal{T}(t) \tag{2.207}$$

Дифференцируя по s, сводим это интегральное уравнение к дифференциальному:

$$\frac{d\mathcal{T}(s)}{ds} = -(n+2)\Gamma(s)\mathcal{T}(s) \tag{2.208}$$

с граничным условием $\mathcal{T}(s=0) = 1$. Отсюда находим:

$$\mathcal{T}(s) = \exp\left\{-(n+2)\int_0^s dt\Gamma(t)\right\} \tag{2.209}$$

Используя здесь (2.177), получаем окончательно:

$$\mathcal{T}(s) = [1 + g(n+8)s]^{-\frac{n+2}{n+8}} \tag{2.210}$$

Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G^{-1}(p=0\tau) = \frac{\partial\chi^{-1}(\tau)}{\partial\tau} = [1+g(n+8)s]^{-\frac{n+2}{n+8}} \tag{2.211}$$

Интегрируя с требуемой точностью, получаем:

$$\chi(\tau) \approx \frac{1}{\tau}\left\{1 + g(n+8)\frac{1}{\varepsilon}[\tau^{-\varepsilon/2} - \Lambda^{-\varepsilon}]\right\}^{\frac{n+2}{n+8}} \to \tau^{-(1+\frac{\varepsilon}{2}\frac{n+2}{n+8})} \tag{2.212}$$

при $\tau \to 0$. Соответственно, для критического индекса восприимчивости находим:

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \ldots \tag{2.213}$$

Это выражение, также как и полученный выше результат $\eta = 0$, справедливы с точностью до членов первого порядка по ε, и представляют собой первые члены ε-разложения критических индексов. Достаточно громоздкий счет позволяет получить поправки высших порядков.

Замечательным результатом современной теории, следующим из этих формул, является утверждение об *универсальности* критического поведения – величина критических индексов в самых различных физических системах определяется только размерностью пространства (системы), в котором изучается фазовый переход, и числом компонент n параметра порядка (т.е., фактически, типом симметрии, нарушаемой при фазовом переходе).

Рис. 2-37

В разложении (2.159), вообще говоря, присутствуют и более высокие степени параметра порядка. Возникает вопрос об их роли в критическом поведении. Почему мы ограничились только $g\phi^4$? Пусть имеется вклад $\lambda\phi^6$. К чему это приведет? Рассмотрим простейшую поправку к этому вкладу, изображаемую диаграммой на Рис.2-37. По порядку величины она определяется интегралом:

$$\lambda^2 \int_{\sqrt{\tau}}^{\Lambda} d^3p_1 \int_{\sqrt{\tau}}^{\Lambda} d^3p_2 \frac{1}{p_1^2 p_2^2 (p_1^2+p_2^2)} \sim \lambda^2 \int_{\sqrt{\tau}}^{\Lambda} dp_1 \int_{\sqrt{\tau}}^{\Lambda} dp_2 \frac{p_1^2 p_2^2}{p_1^2 p_2^2 (p_1^2+p_2^2)} \sim \lambda^2 \ln \frac{\Lambda}{\sqrt{\tau}} \tag{2.214}$$

Для $d > 3$ соответствующая поправка просто сходится (на нижнем пределе, при $\tau \to 0$), так что для $d = 4 - \varepsilon$ взаимодействие типа $\lambda\phi^6$ является *несущественным*. Аналогично дело обстоит и с членами разложения Ландау с более высокими степенями параметра порядка.

Приведем в заключение значения критических индексов с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$ в теории с n – компонентным параметром порядка [14, 15]:

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+2}{n+8}\frac{n^2+22n+52}{(n+8)^2}\frac{\varepsilon^2}{4} + \ldots \tag{2.215}$$

$$2\nu = 1 + \frac{n+2}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{n+2}{n+8}\frac{n^2+23n+60}{(n+8)^2}\frac{\varepsilon^2}{4} + \ldots \tag{2.216}$$

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2}\varepsilon^2 + \frac{n+2}{2(n+8)^2}\left[\frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} - \frac{1}{4}\right]\varepsilon^3 + \ldots \tag{2.217}$$

$$\delta = 3 + \varepsilon + \left[\frac{1}{2} - \frac{n+2}{(n+8)^2}\right]\varepsilon^2 + \ldots \tag{2.218}$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{3}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n+2)(2n+1)}{2(n+8)}\varepsilon^2 + \ldots \tag{2.219}$$

$$\alpha = \frac{4-n}{n+8}\frac{\varepsilon}{2} + \ldots \tag{2.220}$$

Интересно сравнить значения индексов, полученные по этим формулам для $d = 3$ ($\varepsilon = 1$) и $n = 1$ (изинговский случай), в сравнении с результатами численных расчетов (высокотемпературные разложения) для трехмерной модели Изинга. В приводимой таблице даны также значения индексов теории среднего поля (Ландау). Видно, что ε – разложение обеспечивает неплохое согласие с результатами численного анализа [16].

Современные методы расчета, существенно улучшающие результаты простейшего ε – разложения за счет учета вкладов высших порядков, дают значения

[16] Другой достаточно эффективный метод расчета критических индексов может быть основан на их разложении в ряд по обратным степеням числа компонент параметра порядка $1/n$ [14, 15], поскольку при $n \to \infty$, как можно показать, критические индексы также определяются приближением самосогласованного поля (теорией Ландау). Метод вычислений основан на отборе графиков с замкнутыми петлями, поскольку каждая петля дает вклад $\sim n$.

Таблица 2.1 Критические индексы для модели с $n = 1$ (Изинг).

Индекс	Вильсон	Численный счет	Ландау
ν	0.626	0.642	0.5
η	0.037	0.055	0
γ	1.244	1.250	1
α	0.077	0.125	0
β	0.340	0.312	0.5
δ	4.460	5.15	3

индексов, практически совпадающие с результатами численных расчетов и эксперимента [40].

Фермионы и функциональные методы.

Обобщение функциональных методов на фермиевские поля встречает определенные затруднения. В рассматривавшихся выше функциональных интегралах для бозе – полей велось интегрирование по всем возможным классическим (c-числовым) полевым конфигурациям. Для фермиевских полей понятие классического предела отсутствует и неясно, на первый взгляд, о каких возможных полевых конфигурациях тут может вообще идти речь. Переход к классическому пределу связан, как известно, с пределом $\hbar \to 0$. При этом нетривиальные правые части коммутаторов всех бозевских полевых операторов, рассмотренных в Главе 2, обращаются в нуль, а сами операторы переходят в c-числа. Для фермиевских полей, как мы видели там же, квантование осуществляется с помощью *антикоммутаторов*, так что при $\hbar \to 0$ получаем для фермиевских полей просто некоторые антикоммутирующие величины, смысл которых, с точки зрения "здравого смысла" не вполне ясен. Однако именно на этом пути и лежит решение проблемы. Такие величины были введены в математику в середине XIX века Грассманом и называются *грассмановыми переменными*. Функциональная формулировка квантовой теории поля для фермиевских, основанная на использовании грассмановых переменных, была дана Березиным, который впервые ввел понятие интегрирования по этим переменным [41].

Рассмотрим сначала соответствующие математические определения. Генераторы C_i n-мерной грассмановой алгебры удовлетворяют антикоммутационным соотношениям:

$$\{C_i, C_j\} \equiv C_i C_j + C_j C_i = 0 \tag{2.221}$$

где $i = 1, 2, ..., n$. В частности:

$$C_i^2 = 0 \tag{2.222}$$

Поэтому разложение произвольной функции $f(C_i)$ в ряд может содержать только конечное число членов. Например, для одномерной алгебры имеем:

$$f(C) = a + bC \tag{2.223}$$

где a и b – обычные числа. Квадратичный и следующие члены разложения равны нулю.

Для общего n-мерного случая аналог (2.223) имеет вид:

$$f(C) = P_0 + P^{(1)}_{i1} C_{i1} + P^{(2)}_{i1i2} C_{i1} C_{i2} + ... + P^{(n)}_{i1...in} C_{i1} ... C_{in} \tag{2.224}$$

где каждый индекс суммирования принимает значения от 1 до n. Разложение обрывается благодаря (2.221).

Рассмотрим понятие дифференцирования по грассмановым переменным. Существует два типа такого дифференцирования — левое и правое. Левая производная произведения $C_1 C_2$ определяется как:

$$\frac{\partial^L}{\partial C_i}(C_1 C_2) = \delta_{i1} C_2 - \delta_{i2} C_1 \tag{2.225}$$

Правая производная, соответственно, равна:

$$\frac{\partial^R}{\partial C_i}(C_1 C_2) = \delta_{i2} C_1 - \delta_{i1} C_2 \tag{2.226}$$

Потребуем также выполнения равенств:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial C_i}, C_j \right\} = \delta_{ij} \tag{2.227}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial C_i}, \frac{\partial}{\partial C_j} \right\} = 0 \tag{2.228}$$

В частности, для одномерной алгебры:

$$\left\{ \frac{d}{dC}, C \right\} = 1 \tag{2.229}$$

и всегда

$$\left(\frac{\partial}{\partial C_i} \right)^2 = 0 \tag{2.230}$$

Все эти соотношения имеют довольно естественный вид.

Определение интегрирования по грассмановым переменным, напротив, вводится достаточно формальным образом. В частности, эту операцию нельзя ввести как обратную дифференцированию. Ее можно определить, тем не менее, так, чтобы она обладала некоторыми общими свойствами, интуитивно присущими обычному определению интеграла. Например, можно потребовать, чтобы интеграл был инвариантен при сдвиге переменной интегрирования на константу:

$$\int dC f(C) = \int dC f(C + \alpha) \tag{2.231}$$

Это всегда так с обычным интегралом в бесконечных пределах, но надо ясно понимать, что в данном случае ничего общего с обычным интегралом нет (кроме обозначения $\int$), нет тут и никаких пределов интегрирования. Используя явный вид $f(C)$ (2.223), получаем:

$$\int dC(a + bC) = \int dC[a + b(C + \alpha)] \qquad \text{так что}$$

$$\int dC bC = \int dC b(C + \alpha) \tag{2.232}$$

откуда следует:

$$\int dCb\alpha = 0 \tag{2.233}$$

или, ввиду произвольности $b\alpha$,

$$\int dC = 0 \tag{2.234}$$

Здесь α – другой элемент алгебры Грассмана, не зависящий от C и антикоммутирующий с C. Остающийся еще интеграл $\int dCC$ можно просто *доопределить* условием:

$$\int dCC = 1 \tag{2.235}$$

Условия (2.234) и (2.235) полностью определяют операцию интегрирования.

Естественно, что так определенное интегрирование не имеет никакого обычного геометрического смысла. Более того, в случае одномерной алгебры Грассмана мы имеем $\frac{df}{dC} = b$, но и $\int dCf(C) = b$, так что операция интегрирования действует на функцию так же, как и операция дифференцирования!

В n-мерном случае полагаем:

$$\int dC_i = 0 \qquad \int dC_iC_i = 1 \tag{2.236}$$

Пусть теперь η и $\bar{\eta}$ – независимые грассмановы переменные, так что:

$$\int d\eta = \int d\bar{\eta} = 0 \qquad \int d\eta\eta = \int d\bar{\eta}\bar{\eta} = 1 \tag{2.237}$$

Поскольку $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$, имеем:

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta \tag{2.238}$$

так что получаем:

$$\int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\eta d\bar{\eta} - \int d\bar{\eta}d\eta\bar{\eta}\eta = 0 + \int d\bar{\eta}d\eta\eta\bar{\eta} = 1 \tag{2.239}$$

Найдем теперь обобщение этой формулы на случай большего числа измерений. Рассмотрим двумерный случай, вводя, для удобства, обозначения:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \qquad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \tag{2.240}$$

Показатель экспоненты $\bar{\eta}\eta$ (точнее $\bar{\eta}^T\eta$) имеет вид:

$$\bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2 \tag{2.241}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}(\bar{\eta}\eta)^2 &= (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2)(\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) = \\ &= \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 + \bar{\eta}_2\eta_2\bar{\eta}_1\eta_1 = 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2\end{aligned} \tag{2.242}$$

где учли, что $\eta_1^2 = \eta_2^2 = \bar{\eta}_1^2\bar{\eta}_2^2 = 0$. Более высокие степени $\bar{\eta}\eta$ равны нулю и мы, таким образом, получаем:

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \tag{2.243}$$

Применяя введенные выше правила интегрирования, видим, что:

$$\int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_1 d\eta_2 \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 = 1 \tag{2.244}$$

как и в одномерном случае. Проведем теперь замену переменных интегрирования:

$$\eta = M\alpha \qquad \bar{\eta} = N\bar{\alpha} \tag{2.245}$$

где M и N – матрицы 2×2, а α и $\bar{\alpha}$ новые независимые грассмановы переменные. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\eta_1\eta_2 &= (M_{11}\alpha_1 + M_{12}\alpha_2)(M_{21}\alpha_1 + M_{22}\alpha_2) = \\ &= (M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21})\alpha_1\alpha_2 = (DetM)\alpha_1\alpha_2\end{aligned} \tag{2.246}$$

где учли антикоммутативность грассмановых переменных. Чтобы сохранить правила интегрирования

$$\int d\eta_1 d\eta_2 \eta_1\eta_2 = \int d\alpha_1 d\alpha_2 \alpha_1\alpha_2 \tag{2.247}$$

нужно потребовать:

$$d\eta_1 d\eta_2 = (DetM)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{2.248}$$

что отличается от обычного правила замены переменных степенью детерминанта. Учитывая

$$\bar{\eta}\eta = N\bar{\alpha}M\alpha = N\bar{\alpha}\alpha M^T = -\alpha M^T N\bar{\alpha} = \bar{\alpha}M^T N\alpha \tag{2.249}$$

запишем (2.244) в виде:

$$(DetMN)^{-1}\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}M^T N\alpha} = 1 \tag{2.250}$$

Поскольку $DetMN = DetM^T N$, отсюда следует общий результат:

$$\int d\bar{\alpha}d\alpha e^{-\bar{\alpha}A\alpha} = DetA \tag{2.251}$$

что представляет собой гауссов интеграл по грассмановым переменным.

Чтобы описывать фермиевские *поля* совершим теперь переход к бесконечномерной грассмановой алгебре, генераторы которой будем обозначать $C(x)$:

$$\{C(x), C(y)\} = 0 \tag{2.252}$$

$$\frac{\partial^{L,R}C(x)}{\partial C(y)} = \delta(x-y) \tag{2.253}$$

$$\int dC(x) = 0 \qquad \int dC(x)C(x) = 1 \tag{2.254}$$

В результате у нас возникают функциональные интегралы по грассмановым (фермиевским) полям.

Лагранжиан Дирака, как известно, имеет вид:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{2.255}$$

Тогда нормированный производящий функционал для свободного поля Дирака имеет вид:

$$Z_0[\eta,\bar\eta]=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{i\int dx[\bar\psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)+\bar\eta(x)\psi(x)+\bar\psi(x)\eta(x)]\right\} \tag{2.256}$$

где нормировочный множитель

$$\mathcal{N}=\int\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\,\exp\left[i\int dx\bar\psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)\right] \tag{2.257}$$

Здесь мы ввели грассманов источник $\bar\eta(x)$ для поля $\psi(x)$ и $\eta(x)$ для поля $\bar\psi(x)$.

Для сокращения записи удобно ввести обозначение

$$S^{-1}=i\gamma^\mu\partial_\mu-m \tag{2.258}$$

Тогда:

$$Z_0[\eta,\bar\eta]=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\,\exp\left[i\int dx(\bar\psi S^{-1}\psi+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta)\right] \tag{2.259}$$

Рассмотрим квадратичную форму:

$$Q(\psi,\bar\psi)=\bar\psi S^{-1}\psi+\bar\eta\psi+\bar\psi\eta \tag{2.260}$$

Найдем значение ψ, которое ее "минимизирует" из условия:

$$\frac{\partial^L Q}{\partial\bar\psi}=S^{-1}\psi+\eta=0\qquad\frac{\partial^R Q}{\partial\psi}=\bar\psi S^{-1}+\bar\eta=0 \tag{2.261}$$

что дает:

$$\psi_m=-S\eta\qquad\bar\psi_m=-\bar\eta S \tag{2.262}$$

где предположили существование оператора, обратного S^{-1}. В "минимуме" имеем:

$$Q=Q_m=Q(\psi_m,\bar\psi_m)=-\bar\eta S\eta \tag{2.263}$$

Тогда нашу квадратичную форму можно представить в следующем виде:

$$Q=Q_m+(\bar\psi-\bar\psi_m)S^{-1}(\psi-\psi_m) \tag{2.264}$$

Соответственно:

$$\begin{aligned}Z_0[\eta,\bar\eta]&=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{i\int dx[Q_m+(\bar\psi-\bar\psi_m)S^{-1}(\psi-\psi_m)]\right\}=\\&=\frac{1}{\mathcal{N}}\exp\left[-i\int dx\int dy\bar\eta(x)S(x-y)\eta(y)\right]Det(-iS^{-1})\end{aligned} \tag{2.265}$$

где при получении последнего выражения мы вынесли множитель e^{iQ_m} за знак интеграла, поскольку Q_m не зависит от ψ и $\bar\psi$, и воспользовались очевидным функциональным обобщением (2.251):

$$\int\mathcal{D}\bar\psi\mathcal{D}\psi e^{-\bar\psi A\psi}=DetA \tag{2.266}$$

Аналогичным образом можно показать, что $\mathcal{N} = Det(iS^{-1})$, так что окончательно получаем производящий функционал свободного дираковского поля в виде:

$$Z_0[\eta,\bar{\eta}] = \exp\left[-i\int dx\int dy\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right] \tag{2.267}$$

Нетрудно убедиться, что оператор S действительно существует. Он имеет вид:

$$S(x) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_F(x) \tag{2.268}$$

где $\Delta_F(x)$ – хорошо известный нам фейнмановский пропагатор скалярного поля. В самом деле, используя (2.258) имеем:

$$S^{-1}S = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Delta_F(x) = (-\Box - m^2)\Delta_F(x) = \delta(x) \tag{2.269}$$

Теперь можно определить свободный пропагатор дираковского поля как:

$$\tau(x,y) = -\frac{\delta^2 Z_0[\eta,\bar{\eta}]}{\delta\eta(x)\delta\bar{\eta}(y)}|_{\eta=\bar{\eta}=0} =$$

$$= -\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)}\left\{-i\int dx\int dy\bar{\eta}(x)S(x-y)\eta(y)\right\}|_{\eta=\bar{\eta}=0} = iS(x-y) \tag{2.270}$$

где мы использовали $\exp(-\bar{\eta}S\eta) = 1 - \bar{\eta}S\eta$.

Суммируем теперь формулы, относящиеся к свободным скалярному и спинорному полям. Для скалярного поля имеем:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 = -\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi \tag{2.271}$$

Мы нашли выше

$$\tau(x,y) = i\Delta_F(x-y) \tag{2.272}$$

где Δ_F – фейнмановский пропагатор, удовлетворяющий уравнению:

$$(\Box + m^2)\Delta_F(x-y) = -\delta(x-y) \tag{2.273}$$

Для спинорного (дираковского) поля имеем:

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}S^{-1}\psi \tag{2.274}$$

$$\tau(x,y) = iS(x-y) \tag{2.275}$$

В обоих случаях видим, что пропагатор есть оператор, обратный коэффициенту при квадратичном члене в лагранжиане. Можно вообще *принять это в качестве определения пропагатора* для произвольного поля.

Производящий функционал для взаимодействующих ферми – полей может быть определен вполне аналогично бозевскому случаю:

$$Z[\eta,\bar{\eta}] = \exp\left[i\int dx\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right)\right]Z_0[\eta,\bar{\eta}] \tag{2.276}$$

Отсюда можно вывести все правила диаграммной техники для фермиевских полей, вполне аналогично тому, как это было сделано выше в скалярном случае. Единственной существенной особенностью, связанной с грассмановой природой фермиевских полей, является необходимость сопоставления дополнительного множителя

(-1), каждой фермионной петле[17]. Мы не будем рассматривать подробно формулировку диаграммных правил в моделях взаимодействия одних только фермионов, поскольку в четырехмерном пространстве Минковского все они, к сожалению, являются неперенормируемыми.

В качестве примера модели взаимодействий фермионов, которая реально применяется для описания процессов с элементарными частицами, приведем так называемое 4-фермионное взаимодействие Ферми. Оно может быть успешно использовано для описания низкоэнергетических процессов взаимодействия лептонов. Соответствующий лагранжиан взаимодействия (для двух первых поколений лептонов) записывается в следующем стандартном виде [27]:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_w^+ j_w \tag{2.277}$$

где j_w – оператор слабого тока лептонов:

$$\begin{aligned} j_w^\alpha &= \bar{\psi}_e \Gamma^\alpha \psi_{\nu e} + \bar{\psi}_\mu \Gamma^\alpha \psi_{\nu \mu} \\ j_w^{\alpha +} &= \bar{\psi}_{\nu e} \Gamma^\alpha \psi_e + \bar{\psi}_{\nu \mu} \Gamma^\alpha \psi_\mu \end{aligned} \tag{2.278}$$

где

$$\Gamma^\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\alpha(1+\gamma^\alpha) \tag{2.279}$$

а нижние индексы полевых операторов обозначают соответствующие частицы (электрон e, мюон μ, электронное нейтрино ν_e, мюонное нейтрино ν_μ).

Из простейшего размерного анализа ясно, что этот лагранжиан соответствует неперенормируемой теории – константа связи G является размерной величиной, с размерностью квадрата длины или обратного квадрата массы. Ее численное значение, хорошо известное из обработки данных по низкоэнергетическим процессам (описываемым первым порядком теории возмущений по G) с лептонами, таким, как распад мюона, равно:

$$G = 1.0 \cdot 10^{-5} \frac{\hbar^3}{m_p c} = 1.43 \cdot 10^{-49} erg \cdot cm^3 \tag{2.280}$$

где m_p – масса протона, введенная здесь просто как размерный параметр. Ее появление в (2.280) вполне произвольно, мы еще увидим, как такое взаимодействие возникает, как эффективное, в низкоэнергетическом пределе современной теории электромагнитных и слабых взаимодействий.

Ввиду неперенормируемости теории поля с (2.277), это взаимодействие нельзя рассматривать в качестве фундаментального, бессмысленно выписывать и поправки высших порядков соответствующей теории возмущений.

Пропагаторы и калибровочные условия в квантовой электродинамике.

В случае квантовой электродинамики максвелловского поля, производящий функционал имеет вид:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{ i \int dx (\mathcal{L} + J^\mu A_\mu) \right\} \tag{2.281}$$

где J^μ – внешний токовый источник,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.282}$$

[17] Нетрудно показать [8], что происхождение этого множителя связано с функциональным обобщением (2.227), которое имеет вид: $\frac{\delta^2}{\delta\eta(x)\delta\eta(y)} = -\frac{\delta^2}{\delta\eta(y)\delta\eta(x)}$.

Выполнив интегрирование по dx по частям и отбросив поверхностные члены можно переписать этот лагранжиан в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu [g_{\mu\nu} \Box - \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu \tag{2.283}$$

Лагранжиан электромагнитного поля инвариантен относительно градиентных (калибровочных) преобразований $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$. В тоже время, интеграл в (2.281) берется по *всем* A_μ, в том числе и по тем, которые связаны друг с другом калибровочным преобразованием. Очевидно, что это приведет к *бесконечному* вкладу в Z и в функции Грина. Ясно, что нужно фиксировать некоторую частную калибровку так, чтобы интеграл по A_μ *не брался* по полям, связанным друг с другом калибровочным преобразованием. Здесь мы сталкиваемся с проблемой, которая становится особенно острой при переходе к задаче квантования неабелевых калибровочных полей. Оказывается, что в рамках функционального подхода к квантовой теории поля эта проблема может быть последовательно решена. Как это делается будет достаточно подробно показано в следующей главе, а пока ограничимся несколькими замечаниями технического характера.

Если наложить на вектор - потенциал условие Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$, то лагранжиан (2.283) перейдет в:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu g_{\mu\nu} \Box A^\nu \tag{2.284}$$

Оператор, обратный по отношению к $g^{\mu\nu} \Box$ представляет собой пропагатор Фейнмана (см. например Главу 4 части I):

$$D_{F\mu\nu}(x, y) = -g_{\mu\nu} \Delta_F(x, y; m = 0) \tag{2.285}$$

В импульсном представлении, возникающий из (2.284) оператор $-g_{\mu\nu} k^2$ имеет обратный оператор вида $-g^{\nu\lambda} \frac{1}{k^2}$, так что фейнмановский пропагатор электромагнитного поля в калибровке Лоренца имеет вид:

$$D_{F\mu\nu}(k) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \tag{2.286}$$

В общем случае, к лагранжиану можно добавить член, фиксирующий калибровку с произвольным коэффициентом α:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 = \frac{1}{2} A^\mu \left[g_{\mu\nu} \Box + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \partial_\mu \partial_\nu \right] A^\nu \tag{2.287}$$

В импульсном представлении коэффициент при квадрате поля имеем вид:

$$-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k_\mu k_\nu \tag{2.288}$$

а обратный ему оператор дает пропагатор вида:

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \tag{2.289}$$

При $\alpha \to 1$ получаем отсюда фейнмановский пропагатор (калибровка Лоренца - Фейнмана). При $\alpha \to 0$ получаем пропагатор в калибровке Ландау.

Глава 3

КВАНТОВАНИЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ: КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Неабелевы калибровочные поля и метод Фаддеева–Попова.

Перейдем к построению квантовой теории неабелевых калибровочных полей. Задача квантования полей Янга - Миллса долгое время оставалась нерешенной из-за трудностей, связанных с необходимостью корректного учета калибровочной инвариантности. В частности, не удавалось последовательно провести квантование в рамках канонического (операторного) подхода к квантовой теории поля, несмотря на его успешное применение к абелевой квантовой электродинамике. Полное решение этой проблемы было достигнуто Фаддеевым и Поповым с использованием функциональных методов. В последующем изложении в этой главе мы следуем, в основном, книге [11].

Эвристическое рассмотрение основной идеи.

Выше мы видели, что величина обычным образом определенного производящего функционала Z в калибровочной теории (даже в электродинамике), вообще говоря, является бесконечной, поскольку в нем фигурирует интегрирование по *всем*

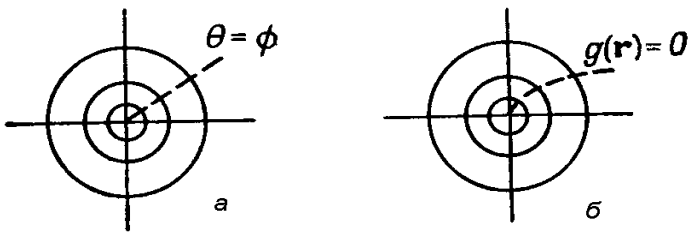


Рис. 3-1

полям A_μ, в том числе и по тем, которые связаны друг с другом калибровочными преобразованиями, оставляющими подинтегральное выражение инвариантным.

Прежде чем приступать к вычислениям, которые позволят последовательно отделить бесконечный "объемный" множитель из (бесконечномерного) функционального интеграла по калибровочному полю, рассмотрим, для иллюстрации основной идеи метода, обычный двумерный интеграл вида:

$$W = \int dx \int dy e^{iS(x,y)} = \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \tag{3.1}$$

где $\mathbf{r} = (r, \theta)$ задает полярные координаты точки на плоскости. Предположим, что (аналог действия!) функция $S(\mathbf{r})$ инвариантна относительно вращений в двумерном пространстве:

$$S(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}_\phi) \tag{3.2}$$

при $\mathbf{r} = (r, \theta) \to \mathbf{r}_\phi = (r, \theta + \phi)$. Это означает, что $S(\mathbf{r})$ постоянна на окружностях ("орбитах") в плоскости (x, y), показанных на Рис.3-1(а). Если в этом тривиальном примере мы хотим учитывать вклад в интеграл только от неэквивалентных значений $S(\mathbf{r})$, то нужно выделить "объемный множитель", соответствующий интегрированию по угловой переменной[1] $\int d\theta = 2\pi$. Чтобы сделать это формальным путем, рассмотрим следующий прием, который далее будет обобщен на более сложные случаи. Подставим в наш интеграл 1, записанную в следующем виде[2]:

$$1 = \int d\phi \delta(\theta - \phi) \tag{3.3}$$

Тогда имеем:

$$W = \int d\phi \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \delta(\theta - \phi) = \int d\phi W_\phi \tag{3.4}$$

где

$$W_\phi = \int d\mathbf{r} \delta(\theta - \varphi) e^{iS(\mathbf{r})} \tag{3.5}$$

вычисляется для данного значения угла $\phi = \theta$. Таким образом, мы сначала вычисляем W при фиксированном значении угла $\phi = \theta$ (связь!), а затем интегрируем по вкладам, соответствующим всем значениям ϕ (см. Рис.3-1(а)). Используя инвариантность функции S (3.2), имеем:

$$W_\phi = W_{\phi'} \tag{3.6}$$

[1] Интегрирование по угловым переменным подразумевается в пределах от 0 до 2π, соответственно пределы явно не выписываем.

[2] Здесь подразумевается, что θ попадает в интервал $(0, 2\pi)$.

Следовательно, "объем" орбиты можно выделить в виде множителя:

$$W = \int d\phi W_\phi = W_\phi \int d\phi = 2\pi W_\phi \tag{3.7}$$

В общем случае можно выбрать более сложную связь, чем $\phi = \theta$, которую можно представить уравнением некоторой кривой $g(\mathbf{r}) = 0$, пересекающей каждую орбиту только один раз, как это показано на Рис.3-1(б), так что уравнение $g(\mathbf{r}_\phi) = 0$ должно иметь единственное решение ϕ для данного значения r. Рассматривая такую связь общего вида, определим вместо простого уравнения (3.3), "представление единицы" вида:

$$1 = \Delta_g(\mathbf{r}) \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] \tag{3.8}$$

Иначе говоря, определим функцию $\Delta_g(\mathbf{r})$ как:

$$[\Delta_g(\mathbf{r})]^{-1} = \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] \tag{3.9}$$

Используя общее правило:

$$\int dx \delta[f(x)] = \int dz \frac{1}{df/dx} \delta(z) = \frac{1}{df/dx}|_{z=0} \tag{3.10}$$

получаем:

$$\Delta_g(\mathbf{r}) = \frac{\partial g(\mathbf{r}_\theta)}{\partial \theta}|_{g=0} \tag{3.11}$$

причем $\Delta_g(\mathbf{r})$ инвариантна относительно двумерных вращений:

$$[\Delta_g(\mathbf{r}_{\phi'})] = \int d\phi \delta[g(\mathbf{r}_{\phi+\phi'})] = \int d\phi'' \delta[g(\mathbf{r}_{\phi''})] = [\Delta_g(\mathbf{r})]^{-1} \tag{3.12}$$

Тогда, повторяя рассуждения, аналогичные переходу от (3.4) к (3.7), можно снова выделить из интеграла "объемный множитель" 2π:

$$W = \int d\phi \int d\mathbf{r} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] e^{iS(\mathbf{r})} = \int d\phi W_\phi \tag{3.13}$$

где

$$W_\phi = \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_\phi)] \tag{3.14}$$

Здесь-то и содержится вся нетривиальная часть интеграла. "Объемный" множитель равен, как мы понимаем, просто 2π, что является формальным следствием инвариантности W_ϕ относительно вращений:

$$W_{\phi'} = \int d\mathbf{r} e^{iS(\mathbf{r})} \Delta_g(\mathbf{r}) \delta[g(\mathbf{r}_{\phi'})] = \int d\mathbf{r}' e^{iS(\mathbf{r}')} \Delta_g(\mathbf{r}'_\phi) = W_\phi \tag{3.15}$$

где введена переменная $\mathbf{r}' = (r, \phi')$ и воспользовались тем, что $S(\mathbf{r})$, $\Delta_g(\mathbf{r})$ и мера интегрирования $d\mathbf{r}$ инвариантны относительно вращений. Таким образом "рецепт" выделения "объемного" множителя состоит в том, что под интеграл вводится ограничивающая δ-функция, которая умножается на Δ_g, определенную условием (3.9).

Выделение объемного множителя в функциональном интеграле.

Перейдем к рассмотрению неабелевых калибровочных теорий. Для определенности рассмотрим случай полей Янга - Миллса с калибровочной группой $SU(2)$. Лагранжиан такой теории имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \qquad a = 1,2,3 \tag{3.16}$$

где

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{3.17}$$

Здесь g – янг-миллсовская константа связи. Производящий функционал определим, как обычно, в виде:

$$Z[\vec{J}] = \int \mathcal{D}\vec{A}_\mu \exp\left\{ i \int dx [\mathcal{L}(x) + \vec{J}_\mu \cdot \vec{A}^\mu(x)] \right\} \tag{3.18}$$

Действие инвариантно относительно калибровочного преобразования:

$$\vec{A}_\mu \to \vec{A}^\theta_\mu \tag{3.19}$$

где

$$\vec{A}^\theta_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} = U(\theta) \left[\vec{A}_\mu \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} + \frac{1}{ig} U^{-1}(\theta) \partial_\mu U(\theta) \right] U^{-1}(\theta) \tag{3.20}$$

$$U(\theta) = \exp\left[i\vec{\theta}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \right] \tag{3.21}$$

– преобразование спинорного представления группы $SU(2)$. Вблизи единичного преобразования $U(\theta)$ можно представить в виде:

$$U(\theta) = 1 + i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} + O(\theta^2) \tag{3.22}$$

Величины $\vec{\theta}(x)$ представляют собой параметры группы, зависящие от точки пространства - времени, а $\vec{\tau}$ – матрицы Паули в изотопическом пространстве.

Действие нашей теории постоянно (инвариантно) на *орбите* калибровочной группы, состоящей из всех $\vec{A}^\theta_\mu$, полученных из некоторой фиксированной конфигурации $\vec{A}_\mu$ преобразованием $U(\theta)$, пробегающим по всем элементам группы $SU(2)$. При правильном квантовании функциональное интегрирование должно осуществляться по "гиперповерхности" в функциональном пространстве, которая пересекает каждую орбиту лишь один раз. Таким образом, если мы запишем уравнение этой гиперповерхности в виде:

$$f_a(\vec{A}_\mu) = 0 \qquad a = 1,2,3 \tag{3.23}$$

то уравнение

$$f_a(\vec{A}^\theta_\mu) = 0 \tag{3.24}$$

должно иметь единственное решение $\vec{\theta}$ при данной полевой конфигурации $\vec{A}_\mu$. Это условие фиксирует выбор калибровки.

Определим теперь интегрирование по параметрам калибровочной группы:

$$[d\vec{\theta}] = \prod_{a=1}^{3} d\theta_a \tag{3.25}$$

Если мы совершаем два калибровочных преобразования $\vec{\theta}$ и $\vec{\theta}'$, то соответствующая матрица имеет вид $U(\theta)U(\theta')$ и параметры преобразования суммируются: $\vec{\theta}+\vec{\theta}'$. Поэтому определенная согласно (3.25) мера интегрирования является инвариантной относительно калибровочных преобразований, в том смысле, что углы θ пробегают при интегрировании все мыслимые значения и сдвиг на константу θ' ничего не меняет. Символически это записывают как $d(\vec{\theta}\vec{\theta}') = d\vec{\theta}'' = d\vec{\theta}$.

Теперь мы можем поступить как и выше (при рассмотрении обычного интеграла), и ввести $\Delta_f[\vec{A}_\mu]$:

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu] = \int [d\vec{\theta}(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^\theta)] \tag{3.26}$$

Отсюда имеем:

$$\Delta_f[\vec{A}_\mu] = DetM_f \tag{3.27}$$

– детерминант Фаддеева - Попова, где

$$(M_f)_{ab} = \frac{\delta f_a}{\delta\theta_b} \tag{3.28}$$

Подробнее эти выкладки выглядят так. Проводя обычную дискретизацию пространства и последующий предельный переход, можем написать:

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu] = \int \prod_x \prod_a d\theta_a(x)\delta[f_a(x)] = \prod_x \prod_a \int df_a(x)\delta[f_a(x)] \frac{\partial(\theta_1(x),\theta_2(x),\theta_3(x))}{\partial(f_1(x),f_2(x),f_3(x))} =$$
$$= \prod_x Det\left[\frac{\partial\theta_a(x)}{\partial f_b(x)}\right]_{f=0} = Det\left[\frac{\delta\theta_a(x)}{\delta f_b(x)}\right]_{f=0} \tag{3.29}$$

В последнем равенстве (после перехода к непрерывному x) возникает функциональный детерминант (якобиан) матрицы с непрерывными индексами $\frac{\delta\theta_a(x)}{\delta f_b(y)}$, который определяется произведением собственных значений этой матрицы.

Матрица M_f связана с бесконечно малыми калибровочными преобразованиями функции $f_a[\vec{A}_\mu]$:

$$f[\vec{A}_\mu^\theta(x)] = f_a[\vec{A}_\mu(x)] + \int dy \frac{\delta f_a(x)}{\delta\theta_b(y)}\theta_b(y) + O(\theta^2) =$$
$$= f_a[\vec{A}_\mu(x)] + \int dy[M_f(x,y)]_{ab}\theta_b(y) + O(\theta^2) \tag{3.30}$$

Тогда из требования единственности решения уравнения (3.24) $f_a(\vec{A}_\mu^\theta) = 0$ относительно $\vec{\theta}$ следует, что $DetM_f$ отличен от нуля. Конкретный вид M_f, естественно, зависит от выбора того или иного условия калибровки (вида функции f_a), явные выражения для случая калибровки Лоренца будут приведены ниже.

Детерминант Фаддеева - Попова $\Delta_f[\vec{A}_\mu]$ калибровочно инвариантен. В самом деле, запишем

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu] = \int [d\vec{\theta}'(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu)^{\theta'}] \tag{3.31}$$

Тогда

$$\Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu^\theta] = \int [d\vec{\theta}'(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta\theta'})] = \int [d\vec{\theta}(x)\vec{\theta}'(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta\theta'})] =$$
$$= \int [d\vec{\theta}''(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta''})] = \Delta_f^{-1}[\vec{A}_\mu] \tag{3.32}$$

что и требовалось доказать. Это вполне аналогично (3.12).

Подставим теперь возникающее из (3.26) "представление единицы"

$$1 = \int [d\vec{\theta}(x)]\Delta_f[\vec{A}_\mu]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^\theta)] \tag{3.33}$$

в (3.18). Тогда, обозначая для единообразия меру интегрирования по полям Янга - Миллса как $[d\vec{A}_\mu(x)]$, получаем:

$$\int [d\vec{A}_\mu(x)] \exp\left\{ i \int dx \mathcal{L}(x) \right\} =$$
$$= \int [d\vec{\theta}(x)] \int [d\vec{A}_\mu(x)]\Delta_f[\vec{A}_\mu]\delta[f_a(\vec{A}_\mu^\theta)] \exp\left\{ i \int dx \mathcal{L}(x) \right\} =$$
$$= \int [d\theta(x)] \int [d\vec{A}_\mu(x)]\Delta_f[\vec{A}_\mu(x)]\delta[f_a(\vec{A}_\mu)] \exp\left\{ i \int dx \mathcal{L}(x) \right\} \tag{3.34}$$

При получении последнего равенства мы воспользовались инвариантностью выражений для $\Delta_f[\vec{A}_\mu]$ и $\exp\left\{ i \int dx \mathcal{L}(x) \right\}$ относительно калибровочных преобразований $\vec{A}_\mu^\theta \to \vec{A}_\mu$. Тогда видим, что подинтегральное выражение не зависит от $\vec{\theta}(x)$ и $\int [d\vec{\theta}(x)] = \prod_x d\vec{\theta}(x)$ дает просто бесконечный "объем" орбиты, который мы и хотели выделить! Поэтому, опуская этот ненужный множитель, производящий функционал калибровочного поля $\vec{A}_\mu$ можно записать как:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu]\Delta_f[\vec{A}_\mu]\delta[f_a(\vec{A}_\mu)] \exp\left\{ i \int dx [\mathcal{L}(x) + \vec{J}_\mu \cdot \vec{A}_\mu] \right\} =$$
$$= \int [d\vec{A}_\mu](Det M_f)\delta[f_a(\vec{A}_\mu)] \exp\left\{ i \int dx [\mathcal{L}(x) + \vec{J}_\mu \cdot \vec{A}_\mu] \right\} \tag{3.35}$$

В этом суть так называемого *анзатца Фаддеева - Попова*, мы устраняем все лишние интегрирования, вводя в функциональную меру множитель $Det M_f \delta[f(\vec{A}_\mu)]$.

Абелева калибровочная теория (КЭД).

Рассмотрим простейший пример – квантовую электродинамику. В этом случае калибровочное преобразование записывается как:

$$A_\mu^\theta = A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta(x) \tag{3.36}$$

В этом случае, при любом выборе калибровочного условия (3.23), линейного по полю $A_\mu(x)$, матрица M_f (3.28) *не зависит* от поля $A_\mu(x)$. Поэтому детерминант Фаддеева - Попова не существен с физической точки зрения, его можно вынести за

знак функционального интегрирования по $A_\mu(x)$ и просто опустить[3]. Тогда производящий функционал записывается как:

$$Z[J] = \int [dA_\mu]\delta[f(A_\mu)] \exp\left\{ i \int dx[\mathcal{L}(x) + J_\mu(x)A^\mu(x)] \right\} \tag{3.37}$$

где $\delta[f(A_\mu)]$ фиксирует конкретную калибровку, после чего мы приходим к обычной формулировке КЭД.

Фейнмановские диаграммы в неабелевой теории.

Перейдем теперь к подробному рассмотрению построения диаграммной техники для неабелевой теории. Перепишем производящий функционал (3.35) в виде:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu] \exp\left\{ iS_{eff} + i \int dx\, \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu \right\} \tag{3.38}$$

где мы просто переписали множитель $DetM_f\delta[f_a(\vec{A}_\mu)]$ в виде $\exp\ln(DetM_f\delta[f_a(\vec{A}_\mu)])$, а величину $-i\ln(DetM_f\delta[f_a(\vec{A}_\mu)])$ включили в определение эффективного действия S_{eff}. Естественно, что наличие такого члена в эффективном действии усложняет задачу построения диаграммной техники. Нужно сначала попытаться представить этот вклад в более естественном виде.

"Духи" Фаддеева - Попова.

Величину $DetM_f$ можно записать в виде экспоненты, воспользовавшись формулой:

$$DetM_f = \exp[Sp\ln M_f] \tag{3.39}$$

Доказательство (3.39) тривиально. Равенство $\ln DetM_f = Sp\ln M_f$ очевидно для любой матрицы: $DetM_f$ представляет собой произведение всех собственных значений M_f, а $\ln DetM_f$ дает тогда сумму логарифмов всех собственных значений M_f, т.е. как раз $Sp\ln M_f$.

Представляя матрицу M_f в виде:

$$M_f = 1 + L \tag{3.40}$$

и разлагая логарифм в ряд, можно написать:

$$\exp[Sp\ln M_f] = \exp\left[SpL + \frac{1}{2}SpL^2 + ... + \frac{1}{n}SpL^n + ... \right] =$$
$$= \exp\left\{ \int dx L_{aa}(x,x) + \frac{1}{2}\int dx \int dy L_{ab}(x,y)L_{ba}(y,x) + ... \right\} \tag{3.41}$$

[3] С точки зрения последующего изложения можно сказать, что в КЭД "духи" Фаддеева - Попова не взаимодействуют с полем A_μ, а потому не существенны.

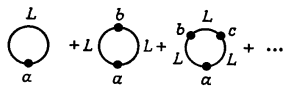


Рис. 3-2

Поэтому детерминант Фаддеева - Попова можно представить в виде *петлевого* разложения[4], показанного на Рис.3-2, где сплошные линии обозначают пропагаторы некоторых фиктивных частиц ("духов" Фаддеева - Попова), образующих изотопический триплет комплексных скалярных (бесспиновых) полей $\vec{c}(x)$. Эти поля и их взаимодействия можно описать производящим функционалом:

$$DetM_f = \int [d\vec{c}][d\vec{c}^{+}] \exp\left\{ i \int dx dy \sum_{ab} c_a^{+}(x)[M_f(x,y)]_{ab} c_b(y) \right\} \tag{3.42}$$

Здесь интегрирование ведется по *грассмановым* $\vec{c}(x), \vec{c}^{+}(x)$, иначе (для c-числовых полей) мы получили бы $(DetM_f)^{-1}$! Поэтому *скалярные* поля $\vec{c}(x), \vec{c}^{+}(x)$ подчиняются *статистике Ферми*. Таким образом, "духи" Фаддеева - Попова являются фермионами со спином 0! Никакого противоречия с теоремой о связи спина и статистики тут, конечно же, нет, поскольку эти "духи" являются чисто фиктивными частицами, которые вводятся в теорию для "удобства записи". Поскольку их вклад в производящий функционал сводится к петлевому ряду (3.41), в теории не возникает диаграмм с внешними линиями "духов".

Члены фиксирующие калибровку.

Попытаемся теперь превратить в экспоненту член $\delta[f_a(\vec{A}_\mu)]$. Для этого сначала обобщим условие, фиксирующее калибровку, переписав его в виде:

$$f_a[\vec{A}_\mu] = B_a(x) \tag{3.43}$$

где $B_a(x)$ – произвольная функция пространственно - временной точки, *не зависящая* от калибровочного поля $\vec{A}_\mu$. Соответственно, определим Δ_f условием:

$$\Delta_f[\vec{A}_\mu] \int [d\vec{\theta}(x)] \delta[f_a(\vec{A}_\mu^{\theta}) - B_a(x)] = 1 \tag{3.44}$$

Очевидно, что ввиду независимости $B_a(x)$ от $\vec{A}_\mu$ это *та же самая* функция Δ_f, что и определенная в (3.26)[5], зависимости от $B_a(x)$ тут, фактически, нет! Поэтому производящий функционал (3.35) можно переписать в виде:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu][d\vec{B}](DetM_f)\delta[f_a(\vec{A}_\mu) - B_a] \exp\left\{ i \int dx [\mathcal{L}(x) - \vec{J}^\mu \cdot \vec{A}_\mu - \frac{1}{2\xi}\vec{B}^2(x)] \right\} \tag{3.45}$$

где мы еще включили в подинтегральное выражение *константу* вида:

$$\int [d\vec{B}] \exp\left\{ -\frac{i}{2\xi} \int dx \vec{B}^2(x) \right\} \tag{3.46}$$

[4]Это разложение аналогично петлевому разложению свободной энергии в теории конденсированного состояния [13]

[5]Это просто аналог (3.6) в случае обычного интегрирования.

где ξ – произвольный постоянный коэффициент, именуемый, обычно, калибровочным параметром. В результате, производящий функционал (3.45) отличается от (3.35) на несущественный постоянный множитель, который можно включить в нормировку. Но теперь, с помощью δ-функции, входящей в (3.45), можно снять интегрирование по $[d\vec{B}(x)]$. В итоге, учитывая еще и (3.42), получаем:

$$Z[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu][d\vec{c}][d\vec{c}^+] \exp(iS_{eff}[\vec{J}]) \tag{3.47}$$

где:

$$S_{eff}[\vec{J}] = S[\vec{J}] + S_{fix} + S_{ghost} \tag{3.48}$$

где $S[\vec{J}] = \int dx[\mathcal{L}(x) + \vec{J} \cdot \vec{A}_\mu]$ – обычное действие рассматриваемой теории,

$$S_{fix} = -\frac{1}{2\xi} \int dx \{f_a[\vec{A}_\mu(x)]\}^2 \tag{3.49}$$

– так называемый член, фиксирующий калибровку, и

$$S_{ghost} = \int dxdy \sum_{ab} c_a^+(x)[M_f(x,y)]_{ab} c_b(y) \tag{3.50}$$

– действие "духов".

Калибровка Лоренца.

В лоренцевской калибровке имеем:

$$f_a(\vec{A}_\mu) \equiv \partial^\mu A_\mu^a = 0 \qquad a = 1,2,3 \tag{3.51}$$

При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях

$$U(\theta) = 1 + i\vec{\theta}(x) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} + O(\theta^2) \tag{3.52}$$

$$A_\mu^{a\theta} = A_\mu^a(x) + \varepsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) \tag{3.53}$$

Подставляя (3.53) в (3.51) имеем:

$$f_a(\vec{A}_\mu^\theta) = f_a(\vec{A}_\mu) + \partial^\mu \left[\varepsilon^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)\right] =$$
$$= f_a(\vec{A}_\mu) + \int dy[M_f(x,y)]_{ab}\theta^b(y) \tag{3.54}$$

где в последнем равенстве использовали (3.30). Тогда видим, что в данном случае

$$[M_f(x,y)]_{ab} = -\frac{1}{g}\partial^\mu[\delta^{ab}\partial_\mu - g\varepsilon^{abc}A_\mu^c]\delta(x-y) \tag{3.55}$$

Подставляя все это в (3.49) и (3.50), получаем:

$$S_{fix} = -\frac{1}{2\xi} \int dx(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{3.56}$$

$$S_{ghost} = \frac{1}{g}\int dx \sum_{ab} c_a^+(x)\partial^\mu[\delta_{ab}\partial_\mu - g\varepsilon_{abc}A_\mu^c]c_b(x) \tag{3.57}$$

Видим, что в данном случае "духи" взаимодействуют с калибровочным полем $\vec{A}_\mu$, что описывается вторым членом в квадратных скобках в (3.57). В аналогичном выражении в КЭД такой член просто отсутствовал [6].

Введем еще грассмановы источники η_a^+, η_a для "духовых" полей c_a, c_a^+, запишем производящий функционал рассматриваемой теории в виде:

$$Z[\vec{J},\vec{\eta},\vec{\eta}^+] = \int [d\vec{A}_\mu d\vec{c}d\vec{c}^+]\exp\left\{ i\int dx[\mathcal{L}(x)- \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + c_a^+\partial^\mu(\delta_{ab}\partial_\mu - g\varepsilon_{abc}A_\mu^c)c_b + J_\mu^a A^{a\mu} + \eta^{a+}c^a + \eta^a c^{a+}]\right\} \tag{3.58}$$

где мы еще переопределили, очевидным образом, поля c_a, c_a^+, включив в них множитель $1/g$.

Разложение теории возмущений.

Запишем теперь действие рассматриваемой теории в виде:

$$S_{eff} = S_0 + S_I \tag{3.59}$$

где

$$S_0 = \int dx\left[-\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + c_a^+\partial^2 c_a + J_\mu^a A^{a\mu} + \eta^{a+}c^a + \eta^a c^{a+}\right] \tag{3.60}$$

а член взаимодействия, содержащий степени полей выше второй, имеет вид:

$$S_I = \int dx\left[-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)g\varepsilon^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu} + \frac{1}{4}g^2\varepsilon^{abc}\varepsilon^{adc}A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu}A^{e\nu} - \right.$$
$$\left. -igc^{a+}\partial^\mu\ \varepsilon^{abc}A_\mu^c c^b\right] \tag{3.61}$$

Производящий функционал можно теперь записать в виде:

$$Z[\vec{J},\vec{\eta},\vec{\eta}^+] = \exp\left\{iS_I\left[\frac{\delta}{i\delta\vec{J}_\mu}, \frac{\delta}{i\delta\vec{\eta}}, \frac{\delta}{i\delta\vec{\eta}^+}\right]\right\} Z_A^0[\vec{J}]Z_c^0[\vec{\eta},\vec{\eta}^+] \tag{3.62}$$

где

$$Z_A^0[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu]\exp\left\{i\int dx\left[-\frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + J_\mu^a A^{a\mu}\right]\right\} \tag{3.63}$$

$$Z_c^0[\vec{\eta},\vec{\eta}^+] = \int [d\vec{c}^+][d\vec{c}]\exp\left\{-i\int dx[c^{a+}\partial^2 c^a - \eta^{a+}c^a - \eta^a c^{a+}]\right\} \tag{3.64}$$

Отсюда очевидным образом выводится разложение теории возмущений. Мы не будем подробно проводить этот вывод, а ограничимся сводкой основных правил построения диаграммной техники. Недостающие подробности можно найти в целом ряде книг, например в [8, 9, 10, 11, 12].

[6] В неабелевом случае также можно выбрать специальную, т.н. аксиальную калибровку, в которой "духи" удается полностью исключить [11], однако "платой" за это является весьма громоздкий вид пропагатора калибровочного поля.

Пропагаторы.

Чтобы найти пропагатор поля $\vec{A}_\mu$, перепишем Z_A^0 в виде:

$$Z_A^0[\vec{J}] = \int [d\vec{A}_\mu] \exp\left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} A_\mu^a \left(g^{\mu\nu}\partial^2 - \frac{\xi-1}{\xi}\partial^\mu\partial^\nu \right) \delta_{ab} A_\nu^b + J_\mu^a A^{a\mu} \right] \right\} =$$
$$= \int [d\vec{A}_\mu] \exp\left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} A_\mu^a K_{ab}^{\mu\nu} A_\nu^b + J_\mu^a A^{a\mu} \right] \right\} \quad (3.65)$$

где

$$K_{ab}^{\mu\nu} = \left[g^{\mu\nu}\partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu \right] \delta_{ab} \quad (3.66)$$

Интегрирование $[d\vec{A}_\mu]$ можно выполнить, пользуясь известной нам формулой для гауссова интеграла (2.47), которая, в частности, может быть записана в таком виде:

$$\int [d\varphi] \exp\left[-\frac{1}{2} < \varphi K \varphi > + < J\varphi > \right] \sim (Det K)^{-1/2} \exp < JK^{-1}J > \quad (3.67)$$

где угловыми скобками обозначены соответствующие интегралы. Применение этой формулы к (3.65) дает:

$$Z_A^0[\vec{J}] = \exp\left\{ -\frac{i}{2} \int dx dy J_\mu^a(x) G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) J_\nu^b \right\} \quad (3.68)$$

где

$$G_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = \delta^{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[-\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) - \xi \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3.69)$$

Легко проверить, что

$$\int dy K_{ab}^{\mu\nu}(x-y) G_{\nu\lambda}^{bc}(y-z) = g_\lambda^\mu \delta_a^c \delta(x-z) \quad (3.70)$$

так что G есть действительно обратный оператор для K.

Аналогично находим:

$$Z_c^0[\vec{\eta}, \vec{\eta}^+] = \exp\left\{ -i \int dx dy \eta^{a+}(x) G^{ab}(x-y) \eta^a(y) \right\} \quad (3.71)$$

где:

$$G^{ab}(x-y) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} \delta_{ab} \quad (3.72)$$

Это прямо соответствует тому, что "дух" является скалярной частицей с нулевой массой (но подчиняющейся статистике Ферми).

В итоге имеем:

1. Пропагатор безмассовых векторных бозонов:

$$i\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i\delta_{ab} \left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3.73)$$

обозначаемый на графиках волнистой линией.

2. Пропагатор "духов" Фаддеева - Попова:

$$i\Delta^{ab}(k) = -i\delta_{ab} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3.74)$$

обозначаемый пунктиром со стрелкой ("дух" отличается от "антидуха"!).

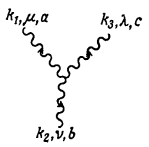


Рис. 3-3

Вершины элементарных взаимодействий.

В неабелевых теориях имеется самодействие калибровочных полей двух типов, что записывается в виде:

$$\varepsilon^{\mu}(k_1)\varepsilon^{\nu}(k_2)\varepsilon^{\lambda}(k_3)\Gamma^{abc}_{\mu\lambda\nu}(k_1,k_2,k_3) \tag{3.75}$$

$$\varepsilon^{\mu}(k_1)\varepsilon^{\nu}(k_2)\varepsilon^{\lambda}(k_3)\varepsilon^{\rho}(k_4)\Gamma^{abcd}_{\mu\lambda\nu\rho}(k_1,k_2,k_3,k_4) \tag{3.76}$$

где выписаны также соответствующие вектора поляризации. Соответствующие правила Фейнмана вытекают непосредственно из (3.61). В импульсном представлении первый член в (3.61) может быть записан как:

$$\frac{1}{3!}A^{a\mu}(k_1)A^{b\nu}(k_2)A^{c\lambda}\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3) \tag{3.77}$$

Вершина $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}$ должна быть полностью антисимметрична при перестановке полей A. Структура, связанная с калибровочной группой $SU(2)$ уже фиксирована:

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3) = \varepsilon^{abc}\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3) \tag{3.78}$$

а лоренцеву структуру этой функции можно получить следующим образом. Из (3.61) ясно, что $\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$ состоит из членов вида $k_{2\mu}g_{\nu\lambda}$. Точную комбинацию этих членов можно установить из требования антисимметрии $\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2,k_3)$ относительно перестановки индексов: μ,ν, $1,2$ и т. д., с учетом полной антисимметрии тензора ε^{abc}. Таким образом найдем:

$$i\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda} = ig\varepsilon^{abc}[(k_1-k_2)_{\lambda}g_{\mu\nu} + (k_2-k_3)_{\mu}g_{\nu\lambda} + (k_3-k_1)_{\nu}g_{\mu\lambda}] \tag{3.79}$$

где $k_1+k_2+k_3=0$. Соответствующий график для "тройной" вершины показан на Рис.3-3.

Аналогичным образом можно найти вершину "четверного" взаимодействия калибровочного поля, соответствующую второму слагаемому в (3.61):

$$\begin{aligned} i\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\lambda\rho} = ig^2[&\varepsilon^{abe}\varepsilon^{cde}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}) + \\ +&\varepsilon^{ace}\varepsilon^{bde}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}) + \varepsilon^{ade}\varepsilon^{cbe}(g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu}-g_{\rho\lambda}g_{\mu\nu})] \end{aligned} \tag{3.80}$$

что изображается графиком на Рис.3-4. Здесь $k_1+k_2+k_3+k_4=0$.

Для вершины, связывающей "духи" и калибровочные поля с вектором поляризации $\varepsilon^{\mu}(q)$ имеем:

$$i\Gamma^{abc}_{\mu} = g\varepsilon^{abc}k_{1\mu} \tag{3.81}$$

где $k_1 = k_2 + q$. Эта вершина изображена на Рис.3-5, она антисимметрична по изоспиновым индексам. Напомним, что "духовые" линии входят в диаграммы только в виде петель. Наряду с каждой диаграммой, содержащей замкнутую петлю калибровочного поля, существует эквивалентная ей диаграмма с замкнутой "духовой"

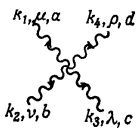


Рис. 3-4

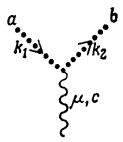


Рис. 3-5

линией в том же месте. Как и в случае обычных фермионных полей, каждая "духовая" петля должна умножаться дополнительно на (-1).

От калибровочного параметра ξ зависит только пропагатор калибровочного поля (3.69), его значение подбирается из соображений удобства при решении конкретных задач. Например $\xi = 1$ соответствует калибровке т'Хоофта - Фейнмана, а $\xi = 0$ отвечает калибровке Ландау.

Введение фермионов в чистую теорию Янга - Миллса, рассмотренную выше, не вызывает трудностей: достаточно добавить к лагранжиану калибровочно - инвариантные члены типа:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \tag{3.82}$$

где

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - igT^a A^a_\mu \psi \tag{3.83}$$

Здесь T^a – генератор калибровочной группы в рассматриваемом представлении. Например, если ψ является $SU(2)$ дублетом, то $T^a = \tau^a/2$. Таким образом возникаю дополнительные правила Фейнмана для фермионов (с групповыми индексами $n, m, ...$):

1. Фермионный пропагатор имеет стандартный вид:

$$i\Delta_{mn}(k) = \delta_{nm}\frac{1}{\gamma_\mu k^\mu - m + i\varepsilon} \tag{3.84}$$

   и изображается сплошной линией.

2. Вершина, соответствующая взаимодействию фермиона с калибровочным полем имеет вид:

$$i\Gamma^{\alpha\mu}_{nm} = ig(T^a)_{nm}\gamma^\mu \tag{3.85}$$

Графически это показано на Рис.3-6.

Структура диаграммной техники, описанная выше сохраняется и для других калибровочных групп, таких, как наиболее важная, с практической точки зрения, группа $SU(3)$ цветовой симметрии кварков. Разница только в размерности соответствующих неприводимых представлений и в виде матриц генераторов группы.

К настоящему моменту мы уже достаточно познакомились с основами современной теории квантовых калибровочных полей, лежащими в основе стандартной

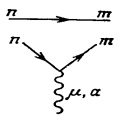


Рис. 3-6

модели элементарных частиц. Пора перейти к обсуждению конкретных моделей их взаимодействия. Но остались еще и некоторые проблемы концептуального характера, которые мы обсуждали в начале нашего курса. В частности, пока не ясно, как быть с проблемой безмассовости полей Янга - Миллса, находящейся, казалось-бы, в разительном контрасте с экспериментом, свидетельствующем о том, что единственным дальнодействующим полем в Природе (кроме гравитационного) является (абелево) электромагнитное поле. В следующей главе мы увидим, как эта проблема решается в единой теории слабого и электромагнитного взаимодействия, к обсуждению которой мы и переходим. Замечательно, что решение этой проблемы оказывается основанным на идеях и методах, заимствованных квантовой теорией поля из современной теории конденсированного состояния.

Глава 4

СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И МОДЕЛЬ ВАЙНБЕРГА-САЛАМА

Спонтанное нарушение симметрии и теорема Голдстоуна.

Как уже отмечалось выше, существенный прогресс в современной теории элементарных частиц был достигнут благодаря использованию ряда концепций теории конденсированного состояния. Наиболее важным оказалось введение в квантовую теорию поля представлений о возможности *фазовых переходов*, когда симметрия основного состояния оказывается более низкой, чем симметрия лагранжиана. На этом пути удалось решить упоминавшуюся проблему генерации масс калибровочных бозонов без нарушения локальной калибровочной инвариантности и прийти к чрезвычайно богатой и нетривиальной картине, лежащей в основе стандартной модели. Более того, представления о серии возможных фазовых переходов лежит в основе современной космологии и физики вещества в экстремальных условиях высоких плотностей и температур. Здесь мы ограничимся лишь рассмотрением ряда основных идей, сыгравших решающую роль при построении единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий[1].

Начнем опять с простейшего примера скалярного вещественного поля $\varphi(x)$ с

[1] Изложение в этой главе, в основном, следует [34].

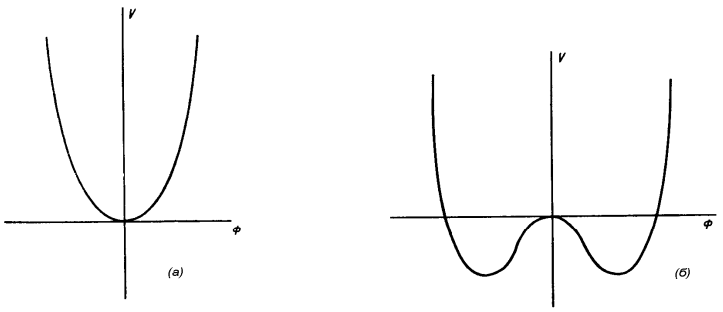


Рис. 4-1

самодействием. Рассмотрим лагранжиан вида:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 - V(\varphi) \tag{4.1}$$

где $V(\varphi)$ – некоторая функция инвариантов поля. Первый член во втором выражении можно трактовать как плотность кинетической энергии поля, а остальные представляют собой плотность потенциальной энергии.

Из (4.1) получаем уравнения движения:

$$\partial_\mu^2 \varphi = -\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \qquad \text{или}$$

$$\partial_t^2 \varphi - \nabla^2 \varphi = -\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \tag{4.2}$$

Характер решений уравнений поля существенно зависит от вида "потенциальной энергии" самодействия $V(\varphi)$. Рассмотрим сначала случай, отвечающий "обычной", традиционной теории поля, рассматривавшейся выше. Пусть $V(\varphi)$ имеет вид, показанный на Рис.4-1(а). Тогда система имеет состояние "устойчивого равновесия" $\varphi = 0$, вокруг которого поле может совершать "малые колебания". Вблизи положения равновесия можно всегда написать:

$$V(\varphi) \approx \frac{\mu^2}{2}\varphi^2 \tag{4.3}$$

где $\mu^2 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0}$, так что (4.2) сводится к:

$$\partial_\mu^2 \varphi + \mu^2 \varphi = 0 \tag{4.4}$$

т.е. к уравнению Клейна - Гордона. Если искать его решение в виде плоской волны $\varphi \sim e^{ikx}$, то из (4.4) сразу следует обычный закон дисперсии релятивистской частицы с массой μ: $k_0^2 = \mathbf{k}^2 + \mu^2$. Следующие члены разложения $V(\varphi)$ приводят к нелинейным членам в полевых уравнениях. Они описывают взаимодействие плоских волн или рассеяние частиц. Ограничимся

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \tag{4.5}$$

Кубический член не вводим, чтобы кривая $V(\varphi)$ была симметричной относительно $\varphi \to -\varphi$, тогда всегда есть минимум $V(\varphi)$ при $\varphi = 0$. Ограничение членом $\sim \varphi^4$

имеет принципиальное значение, тогда константа связи $\lambda > 0$ безразмерна, а теория перенормируема. В общем, это уже хорошо известная нам теория φ^4.

Рассмотрим теперь случай $\mu^2 < 0$. Это несколько странно, поскольку, с наивной точки зрения, соответствует мнимой массе частиц. Но нужно провести более аккуратное рассмотрение. Теперь $\varphi = 0$ не является более положением устойчивого равновесия, а потенциальная энергия имеет вид, показанный на Рис.4-1(б)[2]. Видим, что возникают *два* положения устойчивого равновесия системы, соответствующие:

$$\varphi = \eta = \pm\sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}} \tag{4.6}$$

Разложение $V(\varphi)$ в точках (4.6), с точностью до квадратичных членов, дает:

$$V(\varphi) = \frac{\mu^2\eta^2}{4} - \mu^2(\varphi - \eta)^2 = \frac{\mu^2\eta^2}{4} - \mu^2(\delta\varphi)^2 \tag{4.7}$$

где $\delta\varphi = \varphi - \eta$, причем $-\mu^2(\delta\varphi)^2 > 0$ в силу $\mu^2 < 0$. Отсюда видно, что уравнения поля (4.2) будут иметь решения для $\delta\varphi$ в виде плоских волн с волновым вектором k, удовлетворяющие условию (закону дисперсии) $k^2 = 2|\mu|^2$, так что этим волнам будут соответствовать частицы с *положительной* массой $m = \sqrt{2|\mu|^2}$.

Фактически, мы имеем здесь дело с фазовым переходом в квантовой теории поля. Система переходит в *одно* из двух положений равновесия Рис.4-1(б), а поле совершает малые колебания вблизи этого нового основного состояния.

В квантовой механике колебания системы, имеющей два таких минимума потенциальной энергии, не ограничиваются областью вблизи одного из положений равновесия. Между двумя такими областями возможен туннельный переход. При этом происходит расщепление состояния на два – симметричное и антисмметричное относительно двух положений равновесия, и симметричное состояние является основным [29]. Поэтому в квантовой механике симметрия основного состояния полностью отвечает симметрии функции Лагранжа (в нашем случае – четной по φ.). Квантовая теория поля оказывается, в этом смысле, ближе к классической механике. Дело в том, что вероятность туннельного перехода падает при увеличении числа степеней свободы, а при бесконечном их числе обращается в нуль. В самом деле, рассмотрим поле в конечном объеме Ω. Тогда функция Лагранжа $L = \int d^3x\mathcal{L} \sim \mathcal{L}\Omega$, так что соответствующая кинетическая энергия $\sim \Omega\dot{\varphi}^2$, а потенциальная $\sim \Omega V(\varphi)$. Таким образом, рассматриваемая задача эквивалентна задаче о туннелировании частицы с массой $M \sim \Omega$ через потенциальный барьер шириной $|x| \sim \eta$ и высотой $\mathcal{V} \sim \Omega m^2\eta^2$. Вероятность такого туннельного перехода [29] порядка $\exp(-\sqrt{2M\mathcal{V}}|x|) \sim \exp(-\Omega m\eta^2) \to 0$ при $\Omega \to \infty$. Иногда, для наглядности, говорят, что поле, в основном состоянии, представляет собой "струну" или "веревку" бесконечной длины, лежащую в правой или левой долине потенциала Рис.4-1(б) и вытянутую вдоль этой долины (перпендикулярно плоскости рисунка). Естественно, что такой объект не может туннелировать между долинами потенциального рельефа.

В теории поля основное состояние называется вакуумом. Мы должны задать определенное основное состояние системы – один определенный вакуум. То что имеется второй вакуум, физически эквивалентный первому, уже не играет роли. Поэтому двум минимумам $V(\varphi)$ сопоставляется два различных и ортогональных друг другу вакуума, два ортогональных пространства состояний, два разных мира.

Обычная традиционная теория поля, соответствующая потенциалу $V(\varphi)$, показанному на Рис.4-1(а), строится, как мы знаем, следующим образом. Поле представляется в виде суммы по осцилляторам, описываемы операторами рождения и уничтожения a^+ и a, причем вакуумом называется состояние без частиц $a|0>=0$, так что

$$<0|\varphi|0>=0 \tag{4.8}$$

[2]Тут существует полная аналогия с теорией фазовых переходов Ландау, в которой $\mu^2 \sim T - T_c$, так что $\mu^2 < 0$ при $T < T_c$, т.е. ниже температуры фазового перехода.

В случае потенциала $V(\varphi)$, показанного на Рис.4-1(б), в виде суммы по операторам рождения и уничтожения представляется не само поле φ, а его отклонение от положения равновесия $\delta\varphi = \varphi - \eta$. В этом случае:

$$< 0|\varphi|0 >= \eta \tag{4.9}$$

т.е. вакуумное среднее полевого оператора отлично от нуля – в системе существует *бозе-конденсат*[3] частиц, соответствующих полю φ. Исходный лагранжиан (4.1), (4.5) симметричен относительно $\varphi \to -\varphi$. Однако при $\mu^2 < 0$ он приводит к несимметричному основному состоянию (вакууму), выражением этой несимметрии является (4.9). Возбуждения над этим вакуумом также уже не обладают симметрией исходного лагранжиана, поскольку кривая $V(\varphi)$ с Рис.4-1(б) несимметрична относительно точки $\varphi = \eta$. Произошло то, что в квантовой теории поля называется явлением *спонтанного нарушения симметрии*, а в теории конденсированного состояния хорошо известно как *фазовый переход* в состояние с пониженной симметрией.

Механизм генерации массы.

Существование у скалярного поля отличного от нуля вакуумного среднего может автоматически приводить к появлению *массы* у исходно безмассовых частиц, взаимодействующих с этим полем. Рассмотрим, например, дираковское поле, описывающее свободный безмассовые фермионы спина 1/2. Лагранжиан такого поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L\hat{\partial}\psi_L + i\bar{\psi}_R\hat{\partial}\psi_R \tag{4.10}$$

где $\hat{\partial} = \gamma^\mu\partial_\mu$ и мы ввели "левые" и "правые" компоненты биспинора ψ:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi \qquad \psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi \qquad \psi_L + \psi_R = \psi \tag{4.11}$$

Теперь введем взаимодействие полей ψ_L, ψ_R с нашим скалярным полем φ, нарушающим симметрию. Для этого добавим к лагранжиану (4.10) член вида:

$$\mathcal{L}_{int} = -\varkappa[\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L]\varphi \tag{4.12}$$

где выражение в квадратных скобках представляет собой единственный скаляр, который можно составить из ψ_L и ψ_R, а $\varkappa$ – безразмерная константа взаимодействия (благодаря чему это взаимодействие является перенормируемым). Заменим теперь в (4.12) поле φ его вакуумным средним η, это означает, что мы не рассматриваем процессов с рождением частиц поля φ. Тогда имеем:

$$\mathcal{L}_{int} = -\varkappa\eta(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) = -\varkappa\eta\bar{\psi}\psi \tag{4.13}$$

так что сумма (4.10) и (4.13) дает:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{4.14}$$

что соответствует дираковскому лагранжиану для фермионов с массой:

$$m = \varkappa\eta \tag{4.15}$$

[3] Вспомните боголюбовский подход к теории неидеального бозе-газа!

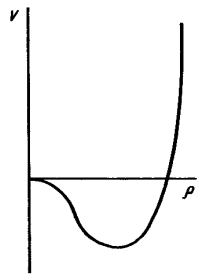


Рис. 4-2

Таким образом, при построении моделей частиц можно исходить из картины первично безмассовых "левых" и "правых" фермионов, взаимодействие которых с полем φ, претерпевающим фазовый переход, превращает "левые" частицы в "правые" и приводит к возникновению массы.

Выше мы рассмотрели простейший пример лагранжиана с дискретной симметрией относительно замены $\varphi \to -\varphi$. Рассмотрим теперь случай нарушения непрерывной симметрии. Для этого введем комплексное скалярное поле φ, что, очевидно, эквивалентно двум вещественным полям φ_1, φ_2, связанным соотношением (ср. Главу 2 части I):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] \tag{4.16}$$

Лагранжиан этого поля запишем в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - V(\varphi_2, \varphi_2) = (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi^*) - V(\varphi_1, \varphi_2) \tag{4.17}$$

Будем считать, что потенциал $V(\varphi_2, \varphi_2)$ зависит только от модуля φ, т.е. от $\rho^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 2\varphi^*\varphi$, так что $V = V(\rho)$. Это означает, что мы требуем дополнительной ("внутренней") симметрии теории относительно преобразования известной нам группы $U(1)$:

$$\varphi \to e^{i\alpha}\varphi \tag{4.18}$$

или, что тоже самое, инвариантности лагранжиана относительно поворота в "изотопической" плоскости:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\to \varphi_1 \cos\alpha - \varphi_2 \sin\alpha \\ \varphi_2 &\to \varphi_1 \sin\alpha + \varphi_2 \cos\alpha \end{aligned} \tag{4.19}$$

Мы видели (см. Главу 2 части I), что с такой симметрией связано сохранение некоторого заряда (электрического, барионного и т.п.). При этом поля φ и φ^* имеют заряды разного знака.

Рассмотрим теперь потенциал $V(\rho)$, показанный на Рис.4-2. что соответствует, например,

$$V(\rho) = \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4 \tag{4.20}$$

при $\mu^2 < 0$. Записывая поле в виде (представление модуль - фаза):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\vartheta(x)} \tag{4.21}$$

где $\rho(x)$ и $\vartheta(x)$ – вещественные функции, видим, что $V(\rho)$ имеет минимум при $\rho = \eta = \sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}}$, т.е. при значениях поля:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta e^{i\alpha} \tag{4.22}$$

с *произвольным* α! Здесь имеется бесконечнократное вырождение основного состояния системы по значениям α. Каждое значение α соответствует своему вакууму (основному состоянию) с одной и той же (минимальной) энергией $V(\eta)$. Все эти вакуумы физически эквивалентны, но выбрать надо только один определенный вакуум, например соответствующий $\alpha = 0$, и вместе с ним одно определенное пространство состояний, в котором уже нет симметрии (4.18),(4.19).

Посмотрим, каким частицам соответствует теперь лагранжиан (4.17). Используя (4.21), перепишем лагранжиан как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 - V(\rho) + \frac{\rho^2}{2}(\partial_\mu \vartheta)^2 \tag{4.23}$$

Если ограничиться в (4.23) лишь квадратичными членами по полю, то следует разложить $V(\rho)$ вблизи $\rho = \eta$ по степеням $\rho' = \rho - \eta$, а в третьем члене (4.23) заменить ρ на η. Тогда получаем лагранжиан свободных частиц в виде:

$$\mathcal{L} = Const + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 + \frac{\eta^2}{2}(\partial_\mu \vartheta)^2 \tag{4.24}$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$. Отсюда немедленно следуют уравнения движения:

$$(\partial_\mu^2 + m^2)\rho' = 0 \qquad \partial_\mu^2 \vartheta = 0 \tag{4.25}$$

Таким образом получили два нейтральных (вещественных) поля ρ' и ϑ, причем первому отвечают частицы с массой m, а второму – *безмассовые частицы*. В (4.25) опущены члены высших порядков, описывающие взаимодействие этих частиц.

Появление безмассовых частиц при спонтанном нарушении непрерывной симметрии теории составляет содержание *теоремы Голдстоуна*, а сами такие частицы называются *годлстонами*[4].

Не составляет труда провести обобщение теоремы Голдстоуна на случай более высоких симметрий. Пусть поле $\varphi(x)$ имеет n компонент. Тогда преобразования группы симметрии можно записать в виде:

$$\Phi = S\Phi' \tag{4.26}$$

где Φ и Φ' – столбцы из n компонент $(\varphi_1, ...\varphi_n)$, а S - матрица $n \times n$. Пусть потенциал $V(\Phi)$ зависит только от $\rho^2 = \varphi_1^2 + ... + \varphi_n^2$ и других инвариантов нет. Тогда:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - V(\rho) \tag{4.27}$$

[4] В теории конденсированного состояния ситуация аналогична. Например фазовый переход в ферромагнитное состояние нарушает непрерывную симметрию группы вращений – обменный гамильтониан Гейзенберга инвариантен относительно вращений (в него входят скалярные произведения спинов на узлах решетки), тогда как в основном состоянии возникает выделенное направление – вектор спонтанной намагниченности (симметрия понижается). Аналогом голдстонов в этом случае являются *акустические* спиновые волны.

В этом случае мы снова можем перейти к "полярным" координатам для поля Φ, когда поле определяется модулем $\rho(x)$ и $n-1$ "угловыми" переменными $\alpha_i(x)(i = 1, 2, ..., n-1)$. Лагранжиан в этих переменных приобретает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{\rho^2}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} \theta_{ik}(\alpha_i)\partial_\mu \alpha_i \partial_\mu \alpha_k - V(\rho) \tag{4.28}$$

Пусть $V(\rho)$ имеет минимум при $\rho = \eta$, т.е. $< 0|\rho|0 >= \eta$. Угловые компоненты α_i можно фиксировать условием $< 0|\alpha_i|0 >= 0$ (выбор вакуума) и тем, что θ_{ik} при $\alpha_i = 0$ имеет вид $\theta_{ik}(0) = \delta_{ik}$. Тогда, вводя опять $\rho' = \rho - \eta$, имеем:

$$\mathcal{L} = Const + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \sum_{i=1}^{n-1}(\partial_\mu \alpha_i)^2 \tag{4.29}$$

Видим, что частицы, соответствующие полям α_i имеют нулевые массы, так что в задаче возникает $n-1$ голдстонов. Это более общий вариант теоремы Голдстоуна.

Калибровочные поля и эффект Хиггса.

Казалось бы появление голдстоуновских частиц с нулевой массой создает нам лишь дополнительные трудности, поскольку основной нашей задачей является решение проблем, связанных с наличием нулевой массы у калибровочных бозонов. Однако это не так! Наоборот, объединение основной идеи калибровочных теорий с концепцией спонтанного нарушения симметрии позволяет прийти к естественной стратегии построения реалистических теорий взаимодействия элементарных частиц.

Рассмотрим взаимодействие скалярного поля φ, нарушающего симметрию, с калибровочным полем A_μ в его простейшем абелевом (максвелловском) варианте. Лагранжиан, инвариантный относительно локальной группы $U(1)$, имеет вид:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi(\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi^*] - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\varphi, \varphi^*) \tag{4.30}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

$$V(\varphi, \varphi^*) = \mu^2 \varphi^* \varphi + \lambda(\varphi^* \varphi)^2 \qquad \mu^2 < 0 \tag{4.31}$$

Введем опять представление поля φ через "радиальное" и "угловое" вещественные поля:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)e^{i\vartheta(x)} \tag{4.32}$$

Но теперь мы можем рассмотреть (4.32) как *локальное калибровочное преобразование* группы $U(1)$:

$$\varphi(x) = e^{ie\chi(x)}\varphi'(x) \tag{4.33}$$

где

$$\chi(x) = \frac{1}{e}\vartheta(x) \qquad \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x) \tag{4.34}$$

Тогда ковариантная производная, входящая в (4.30) преобразуется следующим образом:

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ieA_\mu)e^{ie\chi}\varphi' = e^{ie\chi}(\partial_\mu + ie\partial_\mu\chi - ieA_\mu)\varphi' = e^{ie\chi}(\partial_\mu - ieA'_\mu)\varphi' \qquad (4.35)$$

где

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi \qquad (4.36)$$

или, с учетом (4.33), (4.34):

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\vartheta}(\partial_\mu - ieA'_\mu)\rho \qquad (4.37)$$

где

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\vartheta \qquad (4.38)$$

В результате, наш лагранжиан принимает вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu - ieA'_\mu)\rho][(\partial^\mu + ieA'^\mu)\rho] - V(\rho^2) - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} =$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{e^2}{2}\rho^2 A'^2_\mu - V(\rho^2) - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (4.39)$$

Видим, что "угловая" компонента ϑ поля φ исчезла из лагранжиана (а с ней и возможность появления голдстона!), она "откалибровалась" в переопределенный вектор - потенциал.

Разложим теперь (4.39) по степеням отклонения $\rho' = \rho - \eta$ от вакуумного среднего η, сохраняя только квадратичные члены. Тогда получаем:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A'^2_\mu + Const \qquad (4.40)$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$. Этот лагранжиан описывает два свободных поля – поле ρ' частиц с массой m и векторное поле A'_μ *с массой*:

$$m_A = e\eta \qquad (4.41)$$

целиком обусловленной наличием ненулевого вакуумного среднего скалярного поля. Уравнения движения для этих полей имеют вид:

$$\partial^2_\mu\rho' + m^2\rho' = 0 \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = m_A^2 A'^\nu \qquad (4.42)$$

Второе уравнение здесь имеет вид уравнения Прока.

Итак, в исходном лагранжиане у нас было двухкомпонентное поле φ и векторное максвелловское (безмассовое) поле A_μ. При $\mu^2 > 0$, сохраняя только квадратичные по полям члены, мы получили-бы лагранжиан двух свободных полей, одно из которых описывает заряженные частицы спина 0, а другое соответствует фотону с нулевой массой покоя и двумя поляризуемостями, т.е. всего 4 типа частиц. При $\mu^2 < 0$ число частиц остается тем же (сохранение числа степеней свободы), но они приняли другой характер – теперь есть одно незаряженное скалярное поле спина 0 и три независимы компоненты векторного бозона со спином 1. Исходно у нас была КЭД скалярного поля, а после перестройки системы полей возникла "совсем другая" теория. Важно, однако подчеркнуть, что все преобразования были точными, так

что исходная калибровочная инвариантность теории сохранилась (и была использована), несмотря на возникновение массы у калибровочного поля! Аналогичным образом, сохраняется и свойство перенормируемости.

Возникновение массы у векторного калибровочного поля за счет взаимодействия со скалярным полем, нарушающим симметрию основного состояния, называется *эффектом Хиггса*, а поле φ обычно называют хиггсовским полем (а соответствующие скалярные частицы – *хиггсовскими бозонами*.).

Отступление: теория Гинзбурга - Ландау.

Покажем, что рассмотренное явление является точным аналогом фазового перехода в сверхпроводящее состояние, описываемого теорией Гинзбурга - Ландау, созданной задолго до открытия феномена Хиггса.

Рассмотрим статический случай модели Хиггса, когда $\partial_0\varphi = 0$, $\partial_0 A_\mu = 0$. Электромагнитное поле будем рассматривать в кулоновской калибровке: $A_\mu = (\phi = 0, \mathbf{A})$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Тогда лагранжиан (4.30) запишется как:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\nabla - ie\mathbf{A})\varphi(\nabla + ie\mathbf{A})\varphi^* - \frac{1}{2}m^2|\varphi|^2 - \frac{1}{4}\lambda|\varphi|^4 - \frac{1}{16\pi}(\nabla \times \mathbf{A})^2 \tag{4.43}$$

Тогда

$$F = -\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}|(\nabla - ie\mathbf{A})\varphi|^2 + \frac{1}{2}m^2|\varphi|^2 + \frac{1}{4}\lambda|\varphi|^4 \tag{4.44}$$

представляет собой, в точности, плотность свободной энергии в теории Гинзбурга - Ландау [42], если, конечно, положить $m^2 = a(T - T_c)$, где T_c – температура сверхпроводящего перехода[5]. В этом случае имеем $m^2 > 0$ при температурах $T > T_c$ и $m^2 < 0$ при $T < T_c$. В области $T < T_c$ минимум F достигается при

$$|\varphi|^2 = -\frac{2m^2}{\lambda} > 0 \tag{4.45}$$

что определяет равновесное значение сверхпроводящего *параметра порядка*, являющегося точным аналогом рассматривавшегося выше вакуумного среднего хиггсовского поля (основное состояние полевой системы, $T = 0$.).

Свободная энергия Гинзбурга - Ландау инвариантна относительно калибровочного преобразования:

$$\varphi \to e^{i\Lambda(x)}\varphi \qquad \mathbf{A} \to \mathbf{A} + \frac{1}{e}\nabla\Lambda(x) \tag{4.46}$$

а соответствующий сохраняющийся ток имеет вид:

$$\mathbf{j} = -\frac{ie}{2}(\varphi^*\nabla\varphi - \varphi\nabla\varphi^*) - e^2|\varphi|^2\mathbf{A} \tag{4.47}$$

При $T < T_c$ и однородном в пространстве параметре порядка φ вклад в (4.47) дает только второй член:

$$\mathbf{j} = \frac{2e^2m^2}{\lambda}\mathbf{A} \tag{4.48}$$

[5]По сравнению со стандартными обозначениями [42], мы считаем равной 1 массу электрона и скорость света. Более важно, что в теории Гинзбурга - Ландау, по сравнению с (4.44) $e \to 2e$, в соответствии с зарядом куперовских пар, но здесь нам это несущественно.

что представляет собой уравнение Лондона. Если учесть еще уравнения Максвелла $\nabla \times \mathbf{A} = 4\pi\mathbf{j}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ и вычислить ротор от обеих частей (4.48), то получим уравнение, для магнитного поля в сверхпроводнике:

$$\nabla^2\mathbf{B} = k^2\mathbf{B} \qquad k^2 = \frac{8\pi e^2 m^2}{\lambda} \tag{4.49}$$

описывающее *эффект Мейсснера* – выталкивание магнитного поля из сверхпроводника. Поле экспоненциально спадает внутри сверхпроводника на длине k^{-1} (глубина проникновения) [42].

Наконец, из (4.49) вытекает $\nabla^2\mathbf{A} = k^2\mathbf{A}$, аналогом чего в лоренц - ковариантной форме является уравнение $\Box A_\mu = -k^2 A_\mu$ – "фотон" в сверхпроводнике приобретает "массу" k, что эквивалентно эффекту Хиггса. Таким образом, модель Хиггса является релятивистским аналогом теории Гинзбурга - Ландау, а хиггсовский вакуум аналогичен, по сути дела, основному состоянию сверхпроводника.

Поля Янга - Миллса и спонтанное нарушение симметрии.

Перейдем к рассмотрению механизма Хиггса в неабелевых калибровочных теориях. Напомним сначала основные факты, относящиеся к полям Янга - Миллса, на примере хорошо известной нам группы $SU(2)$.

Взаимодействие скалярного поля φ с Янг - Миллсовским полем $\vec{A}_\mu$ (стрелка обозначает вектор в изотопическом пространстве) описывается переходом от обычной производной $\partial_\mu\varphi$ к ковариантной производной вида:

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu - ig\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu)\varphi \tag{4.50}$$

где $\vec{T}$ – генератор калибровочной группы, для $SU(2)$ имеем $\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$.

Напомним, какие условия накладываются на поле $\vec{A}_\mu$ из требования инвариантности лагранжиана относительно локальных калибровочных преобразований. Если поле φ соответствует какому - либо изотопическому мультиплету, то его преобразование при вращении в изопространстве можно записать в виде:

$$\varphi = S\varphi' \tag{4.51}$$

где оператор S зависит от трех параметров (углов) вектора поворота $\vec{\omega}(x)$. Тогда для ковариантной производной имеем:

$$\begin{aligned} D_\mu\varphi &= S\partial_\mu\varphi' + (\partial_\mu S)\varphi' - ig\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu S\varphi' = \\ &= S(\partial_\mu + S^{-1}\partial_\mu S - igS^{-1}\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu S)\varphi' \end{aligned} \tag{4.52}$$

Для того, чтобы это выражение приняло вид:

$$D_\mu\varphi = S(\partial_\mu - ig\vec{T}\cdot\vec{A}'_\mu)\varphi' \tag{4.53}$$

необходимо потребовать:

$$\vec{T}\cdot\vec{A}'_\mu = S^{-1}(\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu)S + \frac{i}{g}S^{-1}\partial_\mu S \tag{4.54}$$

При малых $\vec{\omega}$ имеем:

$$S = 1 + i\vec{T}\cdot\vec{\omega} \tag{4.55}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} S^{-1}(\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu)S = (1 - i\vec{T}\cdot\vec{\omega})\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu(1 + i\vec{T}\cdot\vec{\omega}) = \\ = \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu - i[\vec{T}\cdot\vec{\omega}, \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu] = \vec{T}\cdot A_\mu + [\vec{\omega}\times\vec{A}_\mu]\cdot\vec{T} \end{aligned} \tag{4.56}$$

где использовали $[T_1, T_2] = iT_3$ – коммутационное соотношение для генераторов группы $SU(2)$. С учетом $S^{-1}\partial_\mu S = i\vec{T}\cdot\partial_\mu\vec{\omega}$ (4.54) и (4.55) дают общее правило преобразования:

$$\vec{A}'_\mu = \vec{A}_\mu + [\vec{\omega}\times\vec{A}_\mu] - \frac{1}{g}\partial_\mu\vec{\omega} \tag{4.57}$$

так что помимо градиентного преобразования поле Янга - Миллса еще и поворачивается в изопространстве.

Тензор полей Янга - Миллса имеет вид:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{A}_\nu - \partial_\nu\vec{A}_\mu + g[\vec{A}_\mu\times\vec{A}_\nu] \tag{4.58}$$

используя (4.57) нетрудно убедиться, что при вращениях в изопространстве $\vec{F}_{\mu\nu}$ преобразуется как изовектор:

$$\vec{F}'_{\mu\nu} = \vec{F}_{\mu\nu} + [\vec{\omega}\times\vec{F}_{\mu\nu}] \tag{4.59}$$

Лагранжиан поля Янга - Миллса имеет вид:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{16\pi}\vec{F}_{\mu\nu}\cdot\vec{F}^{\mu\nu} \tag{4.60}$$

что является инвариантом по отношению к преобразованиям локальной калибровочной группы.

Пусть теперь речь идет о янг - миллсовском поле, взаимодействующем со скалярным хиггсовским поле, нарушающим симметрию. Пусть это поле ϕ представляет собой изоспинор, т.е. имеет две комплексных (4 вещественных) компоненты:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

преобразующиеся при вращениях в изопространстве как:

$$\phi = S\phi' \qquad S = e^{\frac{1}{2}g\vec{\tau}\vec{\omega}(x)} \tag{4.62}$$

При малых $\vec{\omega}$ имеем $S = 1 + ig\vec{\omega}\vec{\tau}/2$.

Лагранжиан системы полей ϕ и $\vec{A}_\mu$ имеет вид:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - V(\phi) - \frac{1}{16\pi}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} \tag{4.63}$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{A}_\mu \tag{4.64}$$

$$V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \tag{4.65}$$

Тогда для $\mu^2 < 0$ (4.31) имеет минимум при:

$$\phi^*\phi = \frac{1}{2}\eta^2 \qquad \eta^2 = \frac{|\mu^2|}{\lambda} \tag{4.66}$$

Вакуумное состояние бесконечнократно вырождено, но мы должны выбрать один определенный вакуум (нарушение симметрии!), например положив:

$$<0|\phi|0>= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

где η – вещественное положительное число. Перейдем теперь к "полярным" координатам:

$$\phi(x) = e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\vartheta}(x)}\phi'(x) = \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i\sin\frac{\vartheta}{2}(\vec{n}\cdot\vec{\tau})\right)\phi'(x) \tag{4.68}$$

где

$$\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho(x) \end{pmatrix} \qquad \vec{\vartheta} = \vec{n}\cdot\vartheta \tag{4.69}$$

и $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении оси, вокруг которой совершается поворот в изопространстве.

Представление (4.68) означает параметризацию изоспинора $\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ при помощи четырех вещественных функций: $\rho, \vartheta, \theta, \varphi$, где $\vartheta, \theta, \varphi$ – полярные углы, определяющие направление вектора $\vec{n}$ в изопространстве:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\rho\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\theta e^{i\varphi} \\ \rho\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - i\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\theta\right) \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

причем $\phi^*\phi = \rho^2/2$, $<0|\rho|0>= \eta$, $<0|\vartheta|0>=<0|\theta|0>=<0|\varphi|0>= 0$.

Заметим, что (4.68) тождественно с (4.62), если положить $\vec{\omega} = \vartheta/g$. Лагранжиан инвариантен относительно таких преобразований и имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D'_\mu\rho)(D'^{\,\mu}\rho)^* - V(\rho) - \frac{1}{16\pi}\vec{F}'_{\mu\nu}\vec{F}'^{\,\mu\nu} \tag{4.71}$$

где в D'_μ и $\vec{F}'_{\mu\nu}$ сделана замена $\vec{A}_\mu \to \vec{A}'_\mu$ соответствующая калибровочному преобразованию. Видим, что только одна из четырех компонент поля ϕ, а именно ρ, осталась в лагранжиане, остальные поглотились калибровочным преобразованием!

Учитывая форму спинора $\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}$, перепишем лагранжиан в виде (штрих над $\vec{A}_\mu$ опускаем):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{g^2}{2}\rho^2\vec{A}_\mu^2 - V(\rho) - \frac{1}{16\pi}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} \tag{4.72}$$

где

$$V(\rho) = \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4 \tag{4.73}$$

При малых отклонениях от вакуума, разлагая опять $V(\rho)$ по степеням $\rho' = \rho - \eta$ и сохраняя в лагранжиане только квадратичные члены, получим:

$$\mathcal{L} = Const + \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 - \frac{m^2}{2}\rho'^2 - \frac{1}{16\pi}\vec{F}^0_{\mu\nu}\vec{F}^{0\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2\eta^2\vec{A}^2_\mu \tag{4.74}$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$ и $\vec{F}^0_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu$. Полученный лагранжиан описывает четыре свободных поля – вещественное скалярное поле ρ и триплет векторных полей $\vec{A}_\mu$. Первому отвечают частицы с массой m, а векторным полям – частицы с массой:

$$m_A = g\eta \tag{4.75}$$

Таким образом, нарушение симметрии опять привело к появлению массы у частиц векторного (калибровочного) поля $\vec{A}_\mu$. Калибровочная инвариантность теории при этом, очевидно, сохранилась! Общее число степеней свободы не изменилось: вместо трех "исчезнувших" компонент поля ϕ (голдстонов) появились продольно поляризованные компоненты поля $\vec{A}_\mu$. В рассмотренной модели массу приобрели все компоненты поля Янга - Миллса, и продольные и поперечные.

Если мы хотим построить объединенную теорию слабого и электромагнитного взаимодействия, нужно обеспечить массивность векторных бозонов – переносчиков слабого взаимодействия (короткодействие!), но электромагнитное поле сохранить безмассовым. Это можно обеспечить, рассмотрев некоторое обобщение только что рассмотренной $SU(2)$-модели. Для этого заметим, что инвариант $\phi^*\phi$ рассмотренного выше скалярного поля автоматически обладает некоторой дополнительной симметрией, кроме использованной нами симметрии $SU(2)$. В самом деле, поле ϕ можно еще умножить на произвольный фазовый множитель типа $\epsilon^{i\frac{f}{2}\lambda(x)}$, ничего от этого не изменится. Это преобразование группы $U(1)$, так что в дальнейшем будем говорить о симметрии $SU(2) \otimes U(1)$. Наличие дополнительной абелевой симметрии $U(1)$ означает, что частицам поля ϕ можно приписать, кроме изоспина, еще и некоторый "гиперзаряд", которому нужно сопоставить еще одно (абелево) калибровочное поле, которое будем обозначать B_μ. В результате, полная симметрия рассматриваемой модели соответствует инвариантности относительно локального калибровочного преобразования вида:

$$\phi = S\phi' \tag{4.76}$$

где

$$S = \exp\left(ig\vec{\omega}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} + if\frac{\lambda(x)}{2}\right) \tag{4.77}$$

а лагранжиан теории имеет вид:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - V(\rho) - \frac{1}{16\pi}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \tag{4.78}$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu - i\frac{f}{2}B_\mu \tag{4.79}$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{4.80}$$

Дальнейший анализ, фактически, повторяет предыдущее рассмотрение, так что детали опускаем. Оказывается удобным вместо полей $A_{\mu 1}, A_{\mu 2}, A_{\mu 3}$ и B_μ ввести следующие их линейные комбинации:

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{\mu 1} + iA_{\mu 2}) \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\alpha A_{\mu 3} - \sin\alpha B_\mu \qquad A_{\mu 3} = \cos\alpha Z_\mu + \sin\alpha A_\mu \\ A_\mu &= \sin\alpha A_{\mu 3} + \cos\alpha B_\mu \qquad B_\mu = -\sin\alpha Z_\mu + \cos\alpha A_\mu \end{aligned} \tag{4.82}$$

где

$$\cos\alpha = \frac{g}{\tilde{g}} \qquad \sin\alpha = \frac{f}{\tilde{g}} \qquad \tilde{g} = \sqrt{g^2 + f^2} \qquad tg\alpha = \frac{f}{g} \tag{4.83}$$

Тогда наш лагранжиан (4.78) переписывается через эти новые поля как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 - V(\rho) + \rho^2[g^2 W_\mu^* W_\mu + \tilde{g}^2 Z_\mu^2] - \frac{1}{16\pi}\vec{F}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{16\pi}G_{\mu\nu}^2 \tag{4.84}$$

Здесь важно, что поле A_μ из (4.82) не вошло в квадратные скобки, так что после возникновения ненулевого вакуумного среднего поля ρ (спонтанного нарушения симметрии) это поле остается безмассовым и может быть отождествлено с обычным электромагнитным полем. В тоже время, поля W_μ и Z_μ приобретают массу:

$$m_W = g\eta \qquad m_Z = \tilde{g}\eta = \frac{m_W}{\cos\alpha} \tag{4.85}$$

Это сразу же видно из записи лагранжиана (4.84) с точностью до квадратичных по $\rho' = \rho - \eta$, W_μ и Z_μ членов:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho')^2 - \frac{1}{2}m^2\rho'^2 - \frac{1}{8\pi}(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)(\partial_\mu W_\nu^* - \partial_\nu W_\mu^*) + \\ + g^2\eta^2 W_\mu^* W^\mu - \frac{1}{16\pi}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 + \tilde{g}^2\eta^2 Z_\mu^2 - \\ - \frac{1}{16\pi}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + Const \end{aligned} \tag{4.86}$$

где $m^2 = 2|\mu^2|$.

Поле W_μ (4.81) является комплексным, т.е. заряженным, а поля A_μ и Z_μ (4.82) вещественны (нейтральны). Из определения $\vec{F}_{\mu\nu}$ (4.58) и (4.81), (4.82) следует:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(F^1 + iF^2)_{\mu\nu} = D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu \tag{4.87}$$

где

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_{\mu 3} = \partial_\mu - ig\sin\alpha A_\mu - ig\cos\alpha Z_\mu \tag{4.88}$$

Если отождествить поле A_μ с электромагнитным полем, то из (4.88) следует следующая связь янг - миллсовской константы связи g с электрическим зарядом:

$$e = g\sin\alpha \tag{4.89}$$

Важным свойством рассматриваемой модели является ее перенормируемость. Перенормируемость КЭД имеет "двойную прочность": она обеспечена во-первых,

безмассовостью фотона и, во-вторых, его нейтральностью. Если отказаться от одного из этих свойств, перенормируемость сохраняется, т.е. перенормируемой является, например, теория взаимодействия фермионов с массивным векторным нейтральным полем. Поэтому можно не бояться, что фотон окажется имеющим очень малую, неуловимую до сих пор массу. Теория существенно не пострадает. Перенормируемой является и теория полей Янга - Миллса, состоящих из двух заряженных и одного нейтрального безмассовых полей, включая и их взаимодействие с фермионами. Благодаря феномену Хиггса заряженные поля Янга - Миллса могут стать массивными, далее мы будем отождествлять их с промежуточными W-бозонами – переносчиками слабого взаимодействия, а Z-бозоны с аналогичными нейтральными частицами. Электромагнитное поле A_μ остается в рассматриваемой модели безмассовым. Возникает вопрос – останется-ли теория перенормируемой после действия эффекта Хиггса? Можно ожидать, что останется, поскольку все составляющие исходного лагранжиана перенормируемы, а дальше мы ничего особенного не делали, кроме вполне допустимых преобразований и переобозначений. Это ожидание оправдывается и при более строгом рассмотрении.

Модель Вайнберга - Салама.

Перейдем к описанию единой схемы описания слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц, предложенной Вайнбергом и Саламом. Это единственная реалистическая модель элементарных частиц, которую мы достаточно подробно рассмотрим в нашем курсе. В настоящее время эта модель прекрасно подтверждена экспериментом и лежит в основе стандартной модели. Основная идея теории электрослабого взаимодействия состоит в том, что слабые взаимодействия переносятся калибровочными бозонами $(W^\pm, Z)$, которые изначально являются безмассовыми, а конечную массу (обеспечивающую короткодействие) приобретают в результате действия механизма Хиггса. Электромагнитное поле, естественно, остается при этом безмассовым. В части, касающейся самих калибровочных полей, такая модель описана в предыдущем разделе. Но нужно еще включить в теорию лептоны – электрон и нейтрино[6], которые исходно также будем предполагать безмассовыми. Механизм Хиггса (спонтанное нарушение симметрии) должно обеспечить возникновение массы у электрона, но не у нейтрино[7].

Начнем со спинорных полей. Лагранжиан Дирака:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{4.90}$$

при $m = 0$ превращается просто в $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$. Введем, как обычно, для безмассовых фермионов:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi \qquad \psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi \qquad \psi = \psi_L + \psi_R \tag{4.91}$$

где $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Тогда

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L \tag{4.92}$$

[6]Последующие поколения лептонов описываются точно также.

[7]Здесь мы пренебрегаем возможным наличием у нейтрино малой массы покоя.

поскольку γ^5 антикоммутирует с γ^μ. Электрон (мюон и τ-лептон) обладают как L, так и R компонентами, однако согласно двухкомпонентной теории нейтрино ν_e (ν_μ, ν_τ) обладают только L-компонентами. Тогда исходный лагранжиан лептонов можно записать в виде:

$$\mathcal{L} = i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R + i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\bar{\nu}_e\gamma^\mu\partial_\mu\nu_e + (e \to \mu) + (e \to \tau) \tag{4.93}$$

где фермионные поля обозначены символами соответствующих частиц. Вклад высших поколений в дальнейшем не выписываем.

Преобразования калибровочной группы должны затрагивать частицы с одинаковыми пространственно - временными свойствами, т.е. единственная возможность состоит в том, чтобы перемешивать e_L и ν_e. Введем тогда изоспинор:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \tag{4.94}$$

и припишем этому дублету неабелев заряд ("слабый" изоспин) $I_W = 1/2$, соответственно двум компонентам. Нейтрино ν_e соответствует третья компонента $I_W^3 = +1/2$, а "электрону" e_L соответствует $I_W^3 = -1/2$. Остается еще

$$\psi_R = e_R \tag{4.95}$$

который считается изосинглетом: $I_W = 0$. Имеем тогда лагранжиан:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L \tag{4.96}$$

который инвариантен относительно преобразований изогруппы $SU(2)$:

$$\psi_L \to e^{-\frac{i}{2}\vec{\tau}\vec{\alpha}}\psi_L \qquad \psi_R \to \psi_R \tag{4.97}$$

или подробнее:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \tag{4.98}$$

Электрический заряд Q и третья компонента слабого изоспина I_W^3 для левых и правых полей связаны следующими очевидными соотношениями:

$$\begin{aligned} L: &\qquad Q = I_W^3 - \frac{1}{2} \\ R: &\qquad Q = I_W^3 - 1 \end{aligned} \tag{4.99}$$

Если сделать эту симметрию локальной калибровочной симметрией, т.е. считать, что $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(x)$, возникнут, как мы видели, три безмассовых калибровочных янг - миллсовских поля. Но фотон не будет входить в их число, поскольку правый электрон e_R, являющийся изосинглетом, не будет взаимодействовать с этими полями, тогда как с фотоном он, естественно, должен взаимодействовать. Тут можно воспользоваться тем обстоятельством, что $SU(2)$ не является максимальной симметрией рассматриваемого лагранжиана. На самом деле можно еще подвергнуть e_R простому преобразованию $U(1)$:

$$e_R \to e^{i\beta}e_R \tag{4.100}$$

Но это может быть только общее преобразование для всех полей. Иными словами ν_e и e_L также должны приобрести одинаковый фазовый множитель. При этом фаза для них не обязана совпадать с фазой для R-лептона. Таким образом можно записать:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{in\beta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{in\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \tag{4.101}$$

где n – некоторое число, которое еще нужно определить. Эта $U(1)$-симметрия приводит к существованию некоторого сохраняющегося заряда, причем e_R обладает одним значением этого заряда, а ν_e и e_L – другим. Очевидно, что это *не* электрический заряд Q, поскольку ν_e и e_L обладают различными зарядами Q. Соответственно, калибровочное поле, отвечающее этой $U(1)$ симметрии, это вовсе не электромагнитное поле. Вайнберг предложил считать, что эта симметрия соответствует сохранению "слабого гиперзаряда" Y_W, определяемого соотношением[8]:

$$Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2} \tag{4.102}$$

Сравнивая это выражение с (4.99) видим, что для левых и правых лептонов нужно ввести:

$$\begin{aligned} L: &\qquad Y_W = -1 \\ R: &\qquad Y_W = -2 \end{aligned} \tag{4.103}$$

Поэтому в (4.101) нужно положить $n = 1/2$, так что константа взаимодействия с гиперзарядовым калибровочным полем для левых полей в два раза меньше соответствующей константы для правых полей. В результате, преобразование группы $U(1)$ приобретает окончательный вид:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i\beta/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \tag{4.104}$$

Таким образом, лагранжиан (4.93), (4.96) инвариантен относительно прямого произведения групп $SU(2) \otimes U(1)$. Теорию Янга - Миллса с такой симметрией мы уже рассмотрели в предыдущем разделе. При этом мы ввели четыре калибровочных поля: изотриплет полей $\vec{A}_\mu$ и изосинглет B_μ, для них $Y_W = 0$.

Лептонные поля ψ_L и ψ_R взаимодействуют с полями $\vec{A}_\mu$, B_μ и хиггсовским полем ϕ. Рассмотрим сначала подробней это последнее взаимодействие. Соответствующий вклад в лагранжиан запишем в виде аналогичном (4.12), уже обсуждавшемся выше в связи с механизмом генерации массы фермионов:

$$\mathcal{L}_M = -\sqrt{2}a(\bar{\psi}_L \psi_R \phi + \bar{\psi}_R \psi_L \phi^*) \tag{4.105}$$

где a – безразмерная константа соответствующего (перенормируемого!) взаимодействия. Хиггсовское поле запишем в виде изоспинора:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} \qquad \phi^* = (\varphi^-, \varphi^0) \tag{4.106}$$

[8] Это выражение записано по аналогии с формулой Гелл-Манна — Нишиджимы для гиперзаряда теории адронов [27]

компоненты которого соответствуют проекциям слабого изоспина $I_W^3 = \pm 1/2$. Из (4.102) видно, что оно обладает следующими квантовыми числами:

$$I_W = 1/2 \qquad Y_W = 1 \tag{4.107}$$

Оба поля φ^+ и φ^0 являются комплексными, так что можно записать:

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3 + i\varphi_4) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \end{pmatrix} \tag{4.108}$$

где $\varphi_1, ..., \varphi_4$ – действительные поля.

Ковариантная производная, описывающая взаимодействие хиггсовского поля с калибровочными полями имеет вид:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - \frac{i}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu - \frac{i}{2} f B_\mu)\phi \tag{4.109}$$

В итоге, часть лагранжиана, содержащая поле ϕ, равна:

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^* (D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^4 - \sqrt{2} a (\bar{\psi}_L \psi_R \phi + \bar{\psi}_R \psi_L \phi^*) \tag{4.110}$$

Подробнее (в компонентах) часть этого лагранжиана, соответствующая взаимодействию хиггсовского поля с лептонами, имеет вид:

$$- \sqrt{2} a (\bar{\nu}_e e_R \varphi^+ + \bar{e}_L e_R \varphi^0 + \bar{e}_R \nu_e \varphi^- + \bar{e}_R e_L \varphi^0) \tag{4.111}$$

Далее, имеем:

$$\phi^* \phi = (\varphi^+)^* \varphi^+ + (\varphi^0)^* \varphi^0 = \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) \tag{4.112}$$

При $\mu^2 < 0$ происходит бозе - конденсация хиггсовского поля и минимуму энергии соответствует:

$$< 0|(\varphi^* \varphi)|0 >= \eta^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \tag{4.113}$$

Выберем вакуум так, чтобы:

$$< 0|\varphi_1|0 >= \eta \qquad < 0|\varphi_2|0 >=< 0|\varphi_3|0 >=< 0|\varphi_4|0 >= 0 \tag{4.114}$$

т.е.

$$< 0|\phi|0 >= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \tag{4.115}$$

Тогда член взаимодействия в низшем порядке (по возбуждениям) имеет вид:

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{2} a (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)\phi = a(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)\eta \tag{4.116}$$

так что с хиггсовским конденсатом η взаимодействуют только электроны. Это означает, что мы добились того, чего хотели – электрон приобретает массу:

$$m_e = a\eta \tag{4.117}$$

а нейтрино остается безмассовым!

Перейдем теперь к рассмотрению взаимодействия лептонов с калибровочными полями, которое учитывается переходом к ковариантной производной:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ig\vec{T}\cdot\vec{A}_\mu - if\frac{Y}{2}B_\mu)\psi \tag{4.118}$$

где Y – слабый гиперзаряд поля ψ, g и f – константы взаимодействия. Для ψ_L имеем $\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$, $Y = -1$, а для ψ_R соответственно $\vec{T} = 0$ и $Y = -2$. Тогда, связанная с взаимодействием с калибровочными полями часть лагранжиана лептонного поля имеет вид:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu + i\frac{f}{2}B_\mu\right)\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma^\mu(\partial_\mu + ifB_\mu)\psi_R \tag{4.119}$$

Входящие сюда калибровочные поля, как мы видели в (4.81), (4.82), (4.83), можно разделить на три типа полей: поле заряженных тяжелых мезонов W_μ, поле нейтральных тяжелых мезонов Z_μ и электромагнитное поле A_μ. Выпишем отдельно части лагранжиана $\mathcal{L}_W$, $\mathcal{L}_Z$, $\mathcal{L}_A$, соответствующие взаимодействию с этими полями:

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{2}\bar{\psi}_L\gamma^\mu(\tau_1 A_{1\mu} + \tau_2 A_{2\mu})\psi_L = \frac{g}{\sqrt{2}}\gamma^\mu(\bar{\nu}_e W_\mu e_L + \bar{e}_L W^*_\mu \nu_e) \tag{4.120}$$

Это лагранжиан слабого взаимодействия лептонов за счет обмена $W^\pm$ - мезонами (т.н. заряженные токи). Кроме того, имеются взаимодействия с полями $A_{\mu 3}$ и B_μ, из (4.119) они имеют вид:

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}_L\gamma^\mu(g\tau_3 A_{\mu 3} - fB_\mu)\psi_L - f\bar{\psi}_R\gamma^\mu B_\mu\psi_R \tag{4.121}$$

или, используя (4.82), (4.83),

$$\frac{\tilde{g}}{2}\gamma^\mu[\bar{\nu}_e(\cos\alpha A_{\mu 3} - \sin\alpha B_\mu)\nu_e - \bar{e}_L(\cos\alpha A_{\mu 3} + \sin\alpha B_\mu)e_L - 2\sin\alpha\bar{e}_R B_\mu e_R] \tag{4.122}$$

так что, выражая $A_{\mu 3}$ и B_μ через Z_μ и A_μ согласно (4.82), получаем:

$$\mathcal{L}_Z = \frac{\tilde{g}}{2}\gamma^\mu(\bar{\nu}_e Z_\mu \nu_e - \cos 2\alpha\bar{e}_L Z_\mu e_L - 2\sin^2\alpha\bar{e}_R Z_\mu e_R) \tag{4.123}$$

– слабое взаимодействие за счет обмена нейтральными Z - бозонами (т.н. нейтральные токи), а также

$$\mathcal{L}_A = -g\sin\alpha\gamma^\mu(\bar{e}_L A_\mu e_L + \bar{e}_R A_\mu e_R) \tag{4.124}$$

– электромагнитное взаимодействие. Заметим, что (4.124) еще раз подтверждает выражение для электрического заряда (4.89). Таким образом, рассматриваемая модель дает единое описание слабого и электромагнитного взаимодействия, при котором поля, соответствующие $W^\pm$ и Z – мезонам, а также и обычное электромагнитное поле возникают из фундаментального требования инвариантности теории относительно локальных калибровочных преобразований группы $SU(2)\otimes U(1)$.

В первые годы после построения модели Вайнберга - Салама процессы слабого взаимодействия за счет нейтральных токов (4.123) не были известны, что рассматривалось как серьезный недостаток рассматриваемой модели. Их открытие в CERN в 1973 году послужило первым серьезным подтверждением именно этой теории электрослабого взаимодействия. Простейший процесс слабого взаимодействия

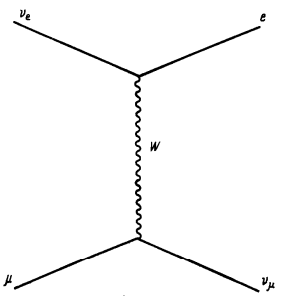


Рис. 4-3

– распад μ описывается диаграммой, показанной на Рис.4-3. Если масса W - мезона существенно больше массы μ, то его пропагатор просто пропорционален $\frac{1}{m_W^2}$, и рассматриваемая амплитуда перехода эквивалентна амплитуде, полученной из феноменологического (непернормируемого) четырехфермионного взаимодействия Ферми (2.95), (2.277), и имеет вид:

$$\frac{g^2}{2m_W^2}(\bar{e}_L\gamma_\alpha\nu_e)(\bar{\nu}_\mu\gamma^\alpha\mu) \tag{4.125}$$

Сравнивая с (2.277), получаем следующее выражение для константы взаимодействия Ферми:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2} \tag{4.126}$$

Величина G хорошо известна из эксперимента и дается (2.280). Видим, что ее малая величина ("слабость" слабого взаимодействия), фактически, связана с наличием в знаменателе (4.125) *большой* массы промежуточного бозона, а на самом деле, фундаментальной константой взаимодействия является $g \sim e$! Используя (4.89)) и экспериментально известные значения e и G, можно, с помощью (4.85) и (4.126) найти следующие оценки масс промежуточных бозонов:

$$m_W = \frac{e}{2^{5/4}\sin\alpha G^{1/2}} = \frac{37GeV}{\sin\alpha} \qquad m_Z = \frac{m_W}{\cos\alpha} = \frac{74GeV}{\sin 2\alpha} \tag{4.127}$$

так что $m_W > 37GeV$ и $m_Z > 74GeV$. Используя (4.85) и (4.127) можем написать:

$$\eta = \frac{m_W}{g} = \frac{37GeV}{e} = 122GeV \tag{4.128}$$

Тогда из (4.117) имеем:

$$a = \frac{m_e}{\eta} \approx 5\cdot 10^{-6} \tag{4.129}$$

так что константа взаимодействия лептонов с хиггсовским полем очень мала.

Экспериментальное исследование процессов слабого взаимодействия посредством нейтральных токов дало, к началу 80-х годов, следующую оценку "угла" α:

$$\sin\alpha \approx 0.47 \tag{4.130}$$

Тогда из (4.127) имеем:

$$m_W \approx 78.6GeV \qquad m_Z \approx 89.3GeV \tag{4.131}$$

Триумфом теории стало открытие в 1983 году $W^{\pm}$ и Z - бозонов в прямых экспериментах в CERN с массами $m_W \approx 80GeV$, $m_Z \approx 92GeV$. С тех пор теория электрослабого взаимодействия получила множество экспериментальных подтверждений и является сейчас общепризнанной схемой их описания.

Основной нерешенной проблемой, в настоящее время, является отсутствие прямого экспериментального подтверждения существования хиггсовских частиц. К сожалению, модель Вайнберга - Салама практически не позволяет дать надежную оценку их массы. Как уже отмечалось в Главе 1 части I, осенью 2000 года в CERN были получены довольно убедительные данные о существовании хиггсовских частиц с массой порядка 115 GeV. Подтверждение этого результата сыграло бы решающую роль в завершении экспериментальной проверки "стандартной модели" [9].

Стандартная модель.

"Стандартная модель" элементарных частиц представляет собой соединение теории электрослабого взаимодействия Вайнберга - Салама и уже бегло обсуждавшейся выше квантовой хромодинамики. Полная калибровочная симметрия теории определяется прямым произведением групп цветовой симметрии, слабого изоспина и слабого гиперзаряда: $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Если ограничиться наиболее важным первым поколением фермионов, то фермионный сектор модели определяется:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \qquad e_R, \qquad Q_L = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ d_\alpha \end{pmatrix}_L, \qquad u_{R\alpha}, \qquad d_{R\alpha} \tag{4.132}$$

где u и d обозначают соответствующие кварки (α - индекс цвета). Ковариантная производная, определяющая взаимодействие фермионов с полями Янга - Миллса, имеет вид:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig_3 \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a \tag{4.133}$$

где λ^a – генераторы цветовой группы $SU(3)$ (см. Главу 2 части I), а G_μ^a – векторные поля глюонов. Хиггсовская часть теории описана выше. Глюоны остаются безмассовыми, но они не наблюдаются в свободном состоянии из-за явления конфайнмента, что еще будет обсуждаться ниже. Как уже отмечалось, такой теории достаточно для описания всего окружающего нас мира. На сегодняшний день все ее предсказания согласуются с имеющимися экспериментами [10]. Попытки реального объединения всех взаимодействий в рамках единой калибровочной группы, включающей симметрию стандартной модели $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ в качестве подгруппы называются теориями "великого объединения" (GUT). Их мы кратко обсудим в следующей Главе.

[9] К сожалению, руководство CERN приняло решение о прекращении соответствующих экспериментов в связи с планами строительства нового ускорителя на той же площадке. Это решение, обусловленное, в основном, финансовыми соображениями, привело к тому, что окончательная ясность с в данном вопросе может возникнуть только через несколько лет, после завершения строительства и запуска новых экспериментальных установок в США.

[10] Краткий обзор экспериментального состояния стандартной модели можно найти в статье: M.K.Gaillard, P.D.Grannis, F.J. Sciulli. Rev.Mod.Phys. **71**, S96 (1999), значение этой теории в "повседневной" жизни хорошо описано в статье: R.N.Cahn. Rev.Mod.Phys. **68**, 951 (1996).

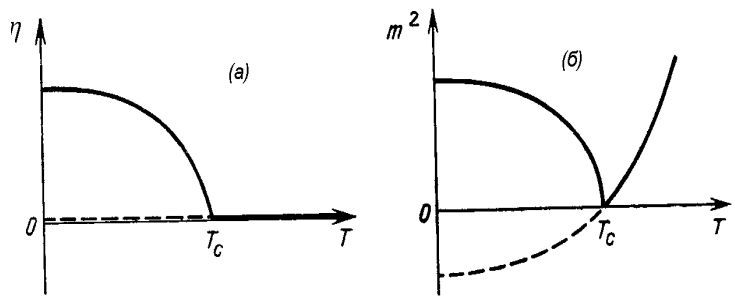


Рис. 4-4

Фазовые переходы в теории поля при конечных температурах.

В заключение остановимся еще на одном, чрезвычайно интересном, направлении современной квантовой теории поля. Мы видели, что в основе теории электрослабого взаимодействия лежит явление спонтанного нарушения симметрии и механизм Хиггса. Выше уже отмечалось, что это явление представляет собой типичный фазовый переход, типа происходящего в сверхпроводниках. Из теории конденсированного состояния мы хорошо знаем, что всякое нарушение симметрии исчезает при достаточно высокой температуре $T > T_c$, когда система переходит в симметричную фазу. Такое же явление имеет место и в рассматриваемых моделях квантовой теории поля. Впервые это было ясно продемонстрировано в работах Киржница и Линде [43]. Соответствующий анализ можно провести, используя стандартную (мацубаровскую) формулировку квантовой теории поля при конечных температурах [13]. Не имея возможности обсуждать эти интересные вопросы в рамках данного курса, мы упомянем только самые основные выводы.

Вакуумное среднее хиггсовского поля, играющее роль параметра порядка обращается в нуль при температурах $T > T_c$, где

$$T_c \approx \sqrt{\frac{3|\mu^2|}{\lambda}} \sim \eta(0) \sim 10^2 - 10^3 GeV \tag{4.134}$$

При $T < T_c$ параметр порядка ведет себя более или менее обычным образом:

$$\eta^2(T) = \frac{|\mu^2|}{\lambda} - \Phi(T) \tag{4.135}$$

где $\Phi(T)$, некоторая возрастающая функция температуры. В результате возникает поведение параметра порядка, показанное на Рис.4-4(а). Но массы частиц, возникающие при спонтанном нарушении симметрии, как мы видели выше, пропорциональны вакуумному среднему η при $T = 0$. Соответственно, при росте температуры массы калибровочных бозонов, лептонов и других частиц уменьшаются и при $T = T_c$ *обращаются в нуль*, как это показано на Рис.4-4(б). Даже на уровне такого простейшего обсуждения ясно, что исчезновение масс частиц и возникновение мощных дальнодействующих сил может играть огромную роль в задачах космологии, поскольку в первые мгновения после "большого взрыва" температура Вселенной была очень высока. Эти выводы повлекли бурное развитие новых подходов в космологии [43, 44]. Аналогичные эффекты могут играть существенную роль и в экспериментах по столкновению очень тяжелых ядер, когда развиваются также очень высокие температуры.

В настоящее время анализ температурных эффектов в квантовой теории поля превратился в необходимую составляющую часть теории элементарных частиц, что более, чем что - либо другое подчеркивает единство квантовой теории поля и современной статистической физики.

Глава 5

ПЕРЕНОРМИРОВКА

Расходимости в теории φ^4.

Понятие перенормируемости играет в современной квантовой теории поля совершенно фундаментальную роль. Только перенормируемые теории считаются имеющими физический смысл. Мы уже провели достаточно краткое обсуждение перенормируемости на примере КЭД в Главе 8 части I. Сейчас мы вернемся к более подробному обсуждению.

В основном, мы будем рассматривать простейшую скалярную теорию поля $g\varphi^4$, которая довольно подробно рассматривалась выше в Главе 2. Мы уже встречались там с типичными расходимостями типа (2.124). Перейдем к более серьезному их анализу. Пользуясь правилами диаграммной техники выпишем опять первую поправку к собственно - энергетической части, изображаемую графиком Рис.5-1. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид:

$$\frac{1}{i}\Sigma = -ig\frac{1}{2}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2-m^2} \tag{5.1}$$

где учтен фактор симметрии 1/2. В числителе подинтегрального выражения стоит

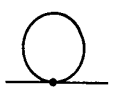


Рис. 5-1

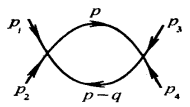


Рис. 5-2

четвертая, а в знаменателе – вторая степень q, соответственно интеграл квадратично расходится при больших q (на верхнем пределе), имеем "ультрафиолетовую" расходимость. Эта диаграмма $\sim g$.

Другая типичная расходимость возникает в порядке $\sim g^2$ от диаграммы, показанной на Рис.5-2, где $p_1 + p_2 = q$ и $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$. Соответствующее аналитическое выражение есть:

$$-g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2} \tag{5.2}$$

Здесь имеется четвертая степень p, как в числителе, так и в знаменателе, что приводит к логарифмической расходимости[1].

Посмотрим как можно определить степень расходимости произвольного графика. Подобный анализ уже проводился нами для КЭД в Главе 8 части I. Но здесь мы уделим ему большее внимание. Очевидно, что в произвольной диаграмме каждый пропагатор дает вклад в знаменатель подинтегрального выражения $\sim p^2$ (при больших p массой m можно просто пренебречь!), а каждая вершина дает вклад в числитель $\sim p^4$, а также δ-функцию, выражающую закон сохранения импульса в этой вершине. Число независимых импульсов, по которым ведется интегрирование, равно числу замкнутых петель в диаграмме. В рассмотренных примерах это число равно 1 (однопетлевые диаграммы). Рассмотрим диаграмму порядка $\sim g^n$, т.е. с n вершинами. Пусть у нее имеется E внешних линий, I внутренних и L петель. Для общности рассмотрим пространство - время с размерностью d – в этом случае вершины дают вклад в числитель, равный p^d. Определим *условную степень расходимости* D данной диаграммы как:

$$D = dL - 2I \tag{5.3}$$

Для рассмотренных выше диаграмм имеем, как уже отмечено, $D = 2$ и $D = 0$. Можно теперь выразить D через E и n, исключив I и L. В самом деле, имеется всего I внутренних импульсов. В каждой из n вершин сохраняется импульс, однако имеется еще и полный закон сохранения импульса в процессе рассеяния, описываемого данной диаграммой (импульсы внешних линий фиксированы). В результате имеется всего $n - 1$ соотношений между импульсами (по которым ведется интегрирование). Таким образом остается всего $I - n + 1$ независимых импульсов интегрирования. Но это число равно L:

$$L = I - n + 1 \tag{5.4}$$

В теории φ^4 в каждую вершину входит четыре линии, так что всего имеется $4n$ линий, часть их них внутренние, а часть – внешние. При подсчете числа линий

[1] Фактически, мы уже довольно подробно рассматривали такие диаграммы при обсуждении теории критических явлений в четырехмерном пространстве, где проблема расходимости решалась введением естественного параметра обрезания Λ, порядка обратной постоянной решетки.

внутренние линии учитываются дважды, поскольку они связывают две вершины. Тогда имеем:

$$4n = E + 2I \tag{5.5}$$

Из (5.3), (5.4), (5.5) немедленно получаем:

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + n(d-4) \tag{5.6}$$

В частности, для $d = 4$ имеем:

$$D = 4 - E \tag{5.7}$$

откуда, в частности, получаются правильные результаты для рассмотренных выше простейших диаграмм. Из (5.7) видно, что степень расходимости уменьшается с ростом числа внешних линий (и зависит только от него!) [2].

Вернемся, однако, к обсуждению общей формулы (5.6) и рассмотрим последнее слагаемое в этом выражении. Если коэффициент при n больше нуля, то ситуация безнадежна – степень расходимости D растет с ростом n, так что полная теория, просуммированная по всем n будет содержать бесконечное число членов, каждый из которых содержит расходимость более высокой степени, чем предыдущий. Это означает неперенормируемость теории. В теории φ^4 при $d = 4$ степень расходимости зависит только от E и не зависит от порядка теории возмущений, так что мы имеем конечное число *типов* расходимостей и можно надеяться, что соответствующие бесконечные вклады можно исключить с помощью конечного числа (бесконечных) перенормировок соответствующих физических величин (перенормируемая теория). Конечное число типов расходимостей – *необходимое* условие перенормируемости.

Полезно рассмотреть аналогичные формулы для случая теории с взаимодействием φ^r. Соотношения (5.3) и (5.4) тогда не меняются, а равенство (5.5) переходит в:

$$rn = E + 2I \tag{5.8}$$

так что (5.6) переписывается в виде:

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + n\left[\frac{r}{2}(d-2) - d\right] \tag{5.9}$$

Отсюда для $d = 4$ имеем:

$$D = 4 - E + n(r-4) \tag{5.10}$$

Для теории φ^6 имеем $D = 4 - E + 2n$ – она неперенормируема. С другой стороны, для теории φ^3 имеем $D = 4 - E - n$ – степень расходимости D убывает с ростом n, так что при заданном E существует только конечное число расходящихся диаграмм – суперперенормируемая теория [3]. Отметим, что для $d = 2$ имеем $D = 2 - 2n$ и не зависит от r.

Вернемся, однако, к (5.7) и обсудим вопрос о сходимости или расходимости графиков с $E > 4$. В теории φ^4 число E всегда четно. Рассмотрим, для примера, графики, показанные на Рис.5-3. Здесь $E = 6$, так что по критерию (5.7) они должны, вроде - бы, сходиться. Это верно для графика Рис.5-3(а), но заведомо неверно для

[2] Может показаться, что вообще все диаграммы с числом внешних концов, большим 4, сходятся. Например, для $E = 6$ имеем $D = -2$. Это, как мы увидим, неверно.

[3] Эта теория, однако, нехороша, поскольку в ней отсутствует устойчивое основное состояние.

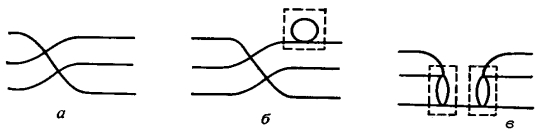


Рис. 5-3

(б) и (в), поскольку они содержат "скрытые" расходимости от уже рассмотренных нами петель. Именно поэтому мы и назвали D условной степенью расходимости. Существенно, что справедливо обратное утверждение: диаграмма Фейнмана сходится, если ее степень расходимости D, а также степени расходимости всех ее подграфов отрицательны (теорема Вайнберга).

Две рассмотренные выше расходящиеся диаграммы Рис.5-1 и Рис.5-2, называются *примитивно расходящимися* диаграммами. Ими исчерпываются все примитивно расходящиеся диаграммы теории φ^4 (типы расходимостей).

Анализ размерностей.

Проведем анализ размерностей в d-мерном пространстве. Действие $S = \int d^d x \mathcal{L}$ безразмерно. Отсюда легко находим:

$$[\mathcal{L}] = L^{-d} \qquad [\mathcal{L}] = \Lambda^d \tag{5.11}$$

где L – длина, а Λ – импульс. Из члена $\sim \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$ в $\mathcal{L}$, с учетом $[\partial_\mu] = L^{-1}$, имеем:

$$[\varphi] = L^{1-\frac{d}{2}} = \Lambda^{\frac{d}{2}-1} \tag{5.12}$$

Рассмотрим взаимодействие $g\varphi^r$. Если ввести размерность константы связи как $[g] = L^{-\delta} = \Lambda^\delta$, то, очевидно, имеем $-\delta + r\left(1 - \frac{d}{2}\right) = -d$, так что эта размерность равна:

$$\delta = d + r - \frac{rd}{2} \tag{5.13}$$

Поэтому размерность константы связи в разных теориях есть:

$$\begin{aligned}
g\varphi^4: &\quad \delta = 4 - d &\quad [g] = \Lambda^{4-d} &\quad \delta \geq 0 \quad \text{для} \quad d \leq 4 \\
g\varphi^3: &\quad \delta = 3 - \frac{d}{2} &\quad [g] = \Lambda^{3-\frac{d}{2}} &\quad \delta \geq 0 \quad \text{для} \quad d \leq 6 \\
g\varphi^6: &\quad \delta = 6 - 2d &\quad [g] = \Lambda^{6-2d} &\quad \delta \geq 0 \quad \text{для} \quad d \leq 3
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Исключая r из равенств (5.9), (5.13), получаем:

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E - n\delta \tag{5.15}$$

В частности, для $d = 4$ имеем $D = 4 - E - n\delta$. Отсюда ясно, что необходимым условием перенормируемости теории является условие $\delta \geq 0$. Выше, для простоты, мы все время говорили о безразмерности константы связи ($\delta = 0$), как о необходимом условии перенормируемости. В (5.14) указано, когда это условие выполняется для простейших моделей взаимодействия. Видим, что здесь существует также и весьма существенная зависимость от размерности пространства.

В заключение, приведем таблицу "канонических" размерностей различных многоточечных функций Грина и вершинных частей [8]:

Полевая функция	Размерность в единицах Λ	Размерность при $d=4$
φ	$\frac{d}{2}-1$	1
$G^{(n)}(x_1,...,x_n)$	$n\left(\frac{d}{2}-1\right)$	n
$G^{(n)}(p_1,...,p_n)$	$-nd+n\left(\frac{d}{2}-1\right)=-n\left(\frac{d}{2}+1\right)$	$-3n$
$\bar{G}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})$	$-d-n\left(\frac{d}{2}+1\right)$	$4-3n$
$\Gamma^{(2)}(x-y)$	$2+d$	6
$\Gamma^{(n)}(x_1,...x_n)$	$n\left(\frac{d}{2}+1\right)$	$3n$
$\Gamma^{(n)}(p_1,...,p_n)$	$-dn+n\left(\frac{d}{2}+1\right)=n\left(1-\frac{d}{2}\right)$	$-n$
$\bar{\Gamma}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})$	$d+n\left(1-\frac{d}{2}\right)$	$4-n$

Здесь, в дополнение к уже известным нам многоточечным функциям и вершинам введены $\bar{G}^{(n)}$ и $\bar{\Gamma}^{(n)}$, определенные равенствами:

$$G^{(n)}(p_1,...,p_n)=\bar{G}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})\delta(p_1+...+p_n)$$
$$\Gamma^{(n)}(p_1,...,p_n)=\bar{\Gamma}^{(n)}(p_1,...,p_{n-1})\delta(p_1+...+p_n) \tag{5.16}$$

где выделена, в явном виде, δ-функция полного закона сохранения импульса (имеющая, в единицах Λ, размерность $-d$).

Размерная регуляризация теории φ^4.

Для того, чтобы провести анализ расходимостей фейнмановских графиков, необходимо сначала научиться эти расходимости корректно выделять. Это достигается тем или иным методом *регуляризации* фейнмановских интегралов. Выше (например при обсуждении расходимостей в КЭД)[4] мы использовали простейший метод регуляризации, основанный на введении параметра обрезания Λ на верхнем пределе. Этот метод явно нарушает релятивистскую инвариантность, поскольку он эквивалентен введению "минимальной длины". Существует более современный и элегантный подход, называемый размерной регуляризацией (т'Хоофт и Вельтман), к изложению которого мы сейчас и переходим. Идея этого метода, близкая, по существу, к методике рассмотрения критических явлений в пространстве с размерностью $d=4-\varepsilon$ (Вильсон), состоит в том, чтобы рассматривать интегралы, содержащие расходимости, как интегралы в пространстве с произвольной $d<4$, а затем перейти к пределу $d\to 4$. Оказывается, что сингулярности рассмотренных выше однопетлевых графиков являются простыми полюсами по переменной $\varepsilon=d-4$.

Обобщим сначала лагранжиан четырехмерной теории:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{5.17}$$

[4] Глава 8, части I.

на случай d измерений. Поскольку поле φ имеет размерность $\frac{d}{2}-1$, а лагранжиан $\mathcal{L}$ – размерность d, константа связи g безразмерна при $d=4$ и для того, чтобы она оставалась безразмерной в d измерениях, ее необходимо умножить на μ^{4-d}, где μ – *произвольный* параметр размерности массы (импульса)[5] . Таким образом, далее будем рассматривать теорию с лагранжианом:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{1}{4!}g\mu^{4-d}\varphi^4 \tag{5.18}$$

Вычислим простейшую поправку к собственно - энергетической части, изображенную графиком Рис.5-1. Аналогично (5.1) она определяется интегралом:

$$\frac{1}{2}g\mu^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2-m^2} \tag{5.19}$$

Это интеграл нужно вычислить при произвольном d.

Интегрирование в d-измерениях.

Работаем в d-мерном "пространстве Минковского" с одним временным и $d-1$ пространственными измерениями ($d\le 4$). Нас интересуют интегралы вида:

$$I_d(q)=\int d^dp\frac{1}{(p^2+2pq-m^2)^\alpha} \tag{5.20}$$

где $p=(p_0,\mathbf{r})$. Введем полярные координаты $(p_0,r,\varphi,\theta_1,\theta_2,...,\theta_{d-3})$, так что:

$$d^dp=dp_0r^{d-2}drd\varphi\sin\theta_1\sin^2\theta_2d\theta_2...\sin^{d-3}\theta_{d-3}d\theta_{d-3}=$$

$$=dp_0r^{d-2}drd\varphi\prod_{k=1}^{d-3}\sin^k\theta_kd\theta_k\qquad(-\infty<p_0<\infty,0<r<\infty,0<\varphi<2\pi,0<\theta_k<\pi) \tag{5.21}$$

Тогда:

$$I_d(q)=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}drr^{d-2}\int_0^\pi\frac{\prod_{k=1}^{d-3}\sin^k\theta_kd\theta_k}{(p^2+2pq-m^2)^\alpha} \tag{5.22}$$

Воспользуемся теперь формулой:

$$\int_0^{\pi/2}d\theta(\sin\theta)^{2n-1}(\cos\theta)^{2m-1}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \tag{5.23}$$

и положим в ней $m=1/2$. Тогда, с учетом $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, имеем:

$$\int_0^\pi d\theta(\sin\theta)^k=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \tag{5.24}$$

так что:

$$I_d(q)=\frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\int\frac{r^{d-2}dr}{(p_0^2-r^2-2pq-m^2)^\alpha} \tag{5.25}$$

Оставшиеся интегралы можно вычислить, используя релятивистскую инвариантность (5.25) [8]. В итоге получаем:

$$I_d(q)=i\pi^{d/2}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{[-q^2-m^2]^{\alpha-d/2}} \tag{5.26}$$

Используя (5.26), получаем для (5.19):

$$-\frac{ig}{32\pi^2}m^2\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) \tag{5.27}$$

[5]Произвольность параметра μ очевидна ввиду последующего предельного перехода $d\to 4$

Г-функция имеет полюса в нуле и в отрицательных целых точках. Видим, что расходимость (5.27) проявляется как простой полюс при $d \to 4$. Можно показать, что:

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi_1(n+1) + O(\varepsilon)\right] \tag{5.28}$$

где $\psi_1(z) = d\ln\Gamma(z)/dz = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ – логарифмическая производная Г-функции, для которой имеем: $\psi_1(n+1) = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\gamma$, где $\gamma = -\psi_1(1) = 0.577$ – постоянная Эйлера. Полагая $\varepsilon = 4-d$ получаем:

$$\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\varepsilon} - 1 + \gamma + O(\varepsilon) \tag{5.29}$$

В результате, используя $a^\varepsilon = 1 + \varepsilon\ln a + ...$, получаем следующее разложение (5.27) вблизи $d = 4$:

$$\begin{aligned} -\frac{igm^2}{32\pi^2}\left[-\frac{2}{\varepsilon} - 1 + \gamma + O(\varepsilon)\right]\left[1 + \frac{\varepsilon}{2}\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right] = \\ = \frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{igm^2}{32\pi^2}\left[1 - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right)\right] + O(\varepsilon) = \\ = \frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon} + \text{Конечное выражение.} \end{aligned} \tag{5.30}$$

Конечный вклад не играет тут особенно важной роли, заметим, все же, что он зависит от произвольного фактора μ. Главное, что нам удалось корректно выделить расходимость, при $\varepsilon > 0$ этот вклад конечен и с ним можно работать обычным образом.

Вычислим теперь 4-точечную функцию, с точностью до членов $\sim g^2$. Аналогично (5.2) для вклада диаграммы Рис.5-2 имеем:

$$-\frac{1}{2}g^2(\mu^2)^{4-d}\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2-m^2} \tag{5.31}$$

Знаменатели в подинтегральном выражении можно объединить с помощью формулы Фейнмана:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{[az+b(1-z)]^2} \tag{5.32}$$

Эта формула выводится из:

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{dx}{x^2} \tag{5.33}$$

если положить $x = az+b(1-z)$, причем a и b следует считать комплексными, чтобы исключить сингулярность при $a = b$. Имеем теперь:

$$\frac{1}{p^2-m^2}\frac{1}{(p-q)^2-m^2} = \int_0^1\frac{dz}{[p^2-m^2-2pq(1-z)+q^2(1-z)]^2} \tag{5.34}$$

Совершая замену переменных $p' = p-q(1-z)$ видим, что знаменатель подинтегрального выражения является квадратом от $p'^2 - m^2 + q^2z(1-z)$. Однако $d^dp' = d^dp$, так что после переобозначения $p' \to p$ (5.31) приобретает вид:

$$-\frac{1}{2}g^2(\mu^2)^{4-d}\int_0^1 dz\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{1}{[p^2-m^2+q^2z(1-z)]^2} \tag{5.35}$$

Используя (5.26) имеем отсюда:

$$\frac{ig^2}{2}(\mu^2)^{4-d}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{d/2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)}\int_0^1 dz[q^2z(1-z)-m^2]^{d/2-2} =$$
$$= \frac{ig^2}{32\pi^2}(\mu^2)^{2-d/2}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)\int_0^1 dz\left[\frac{q^2z(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right]^{\frac{d}{2}-2} \tag{5.36}$$

В пределе $d \to 4$ из (5.28) имеем:

$$\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) \tag{5.37}$$

так что, с использованием $a^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon \ln a$, (5.36) принимает вид:

$$\frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+O(\varepsilon)\right)\left\{1-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 \ln\left[\frac{q^2z(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right]\right\} =$$
$$= \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} - \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left\{\gamma + \int_0^1 \ln\left[\frac{q^2z(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right]\right\} \tag{5.38}$$

В этом выражении главный (расходящийся) член зависит от μ, а конечная часть от квадрата суммарного импульса $(p_1+p_2)^2 = q^2 = s$ (переменной Манделстама). Определим функцию:

$$F(s,m,\mu) = \int_0^1 dz \ln\left[\frac{sz(1-z)-m^2}{4\pi\mu^2}\right] \tag{5.39}$$

Тогда итоговое выражение для вклада диаграммы Рис.5-2 имеет вид:

$$-\frac{ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}[\gamma + F(s,m,\mu)] = -\frac{ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} + \text{Конечное выражение.} \tag{5.40}$$

Итак, мы получили в явном виде поправки низшего порядка к 2-х и 4-точечной функциям в теории φ^4. Выпишем теперь соответствующие 1ЧН-вершины $\Gamma^{(2)}(p)$ и $\Gamma^{(4)}(p_i)$. Выражение (5.30) сводится согласно (5.1) к $\frac{1}{i}\Sigma$, так что в первом порядке по g имеем:

$$\Sigma(p) = -\frac{gm^2}{16\pi^2\varepsilon} + \text{Конечное выражение.} \tag{5.41}$$

Соответственно, из определения $\Gamma^{(2)}(p) = G^{-1}(p)G(p)G^{-1}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p)$ имеем:

$$\Gamma^{(2)}(p) = G^{-1}(p) = p^2 - m^2\left(1 - \frac{g}{16\pi^2\varepsilon}\right) \tag{5.42}$$

Очевидно, что при $\varepsilon \to 4$ это выражение расходится.

Далее, 4-точечная вершина $\Gamma^{(4)}(p_1,...,p_4)$ в импульсном представлении выражается как:

$$\Gamma^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4) = G^{-1}(p_1)G^{-1}(p_2)G^{(4)}(p_1,p_2,p_3,p_4)G^{-1}(p_3)G^{-1}(p_4) \tag{5.43}$$

и представляется суммой диаграмм, показанных на Рис.5-4, соответствующих учету всех кроссинг каналов, вклад которых получается из (5.40) и еще двух аналогичных

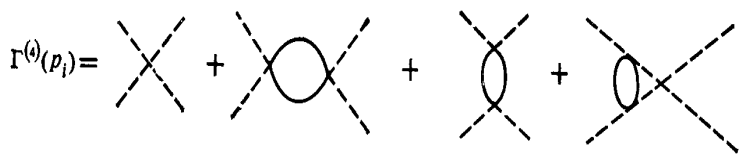


Рис. 5-4

членов, получаемых из (5.40) заменой манделстамовской переменной s на t и u (см. Главу 5 части I):

$$s = (p_1 + p_2)^2 \qquad t = (p_1 + p_3)^2 \qquad u = (p_1 + p_4)^2 \tag{5.44}$$

Действие функций $G^{-1}(p_i)$ сводится в (5.43) к "обрубанию" внешних концов. В итоге получаем:

$$\Gamma^{(4)}(p_i) = -ig\mu^\varepsilon - \frac{3ig^2\mu^\varepsilon}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{ig^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}[3\gamma + F(s,m,\mu) + F(t,m,\mu) + F(u,m,\mu)] =$$
$$= -ig\mu^\varepsilon \left(1 + \frac{3g}{16\pi^2\varepsilon}\right) + \text{Конечное выражение.} \tag{5.45}$$

Основной вклад здесь также бесконечен при $\varepsilon \to 0$. Чтобы вершины $\Gamma^{(2)}$ и $\Gamma^{(4)}$ имели физический смысл, они должны быть конечны. Для этого и нужно проводить перенормировку!

Петлевое разложение.

Заметим, что в наших вычислениях рассматривались диаграммы с одинаковым числом петель: оно было равно 1 (однопетлевое приближение). Существуют соображения, из которых видно, что разложение по числу петель, в некотором смысле, даже более интересно, чем обычное разложение теории возмущений по степеням g. Разложение по числу петель L эквивалентно разложению по степеням постоянной Планка $\hbar$. В самом деле, восстанавливая везде $\hbar$, можем записать производящий функционал теории в виде:

$$Z[J(x)] = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int dx[\mathcal{L}(x) + \hbar J(x)\varphi(x)]\right\} \tag{5.46}$$

Вводя $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$, можем написать:

$$Z[J] = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{L}_{int}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]\right\} Z_0[J] \tag{5.47}$$

где

$$Z_0[J] = \mathcal{N}\exp\left[-\frac{1}{2}i\hbar\int dx\int dy J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] \tag{5.48}$$

Из (5.47) следует, что каждая вершина дает множитель $\hbar^{-1}$ в произвольный график n-го порядка обычной теории возмущений, а из (5.48) следует, что при этом каждый пропагатор дает множитель $\hbar$. Таким образом, данный график содержит множитель $\hbar^{I-n} = \hbar^{L-1}$ (где мы использовали выведенное выше соотношение (5.4): $L = I - n + 1$, где I – число внутренних линий данной диаграммы). Поэтому разложение по числу петель действительно является разложением по степеням $\hbar$, т.е. разложением "в окрестности" классической теории.

Перенормировка теории φ^4.

Наша цель теперь – сделать физические величины конечными! В однопетлевом приближении перенормировку несложно выполнить в явном виде. Поскольку после регуляризации все величины у нас конечны, то можно действовать прямым путем. Из определения физической массы частицы ясно, что обратный пропагатор *должен* иметь вид:

$$G^{-1}(p) = \Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m_1^2 \qquad \text{или} \qquad m_1^2 = -\Gamma^{(2)}(0) = -G^{-1}(0) \tag{5.49}$$

где физическая масса m_1 конечна. Первоначальная ("затравочная") масса m, входящая в лагранжиан не имеет непосредственного физического смысла и, в пределе $d \to 4$ может быть и бесконечной. Это масса, которой частица обладала-бы в отсутствие взаимодействия, так что это ненаблюдаемая величина, только m_1 имеет физический смысл и должна быть конечна. Из (5.42) и определения (5.49) имеем:

$$m_1^2 = m^2 \left(1 - \frac{g}{16\pi^2\varepsilon}\right) \tag{5.50}$$

Но во втором слагаемом в правой части этого выражения можно, с той же точностью $\sim g$, заменить m на m_1, что дает:

$$m_1^2 = m^2 - \frac{g}{16\pi\varepsilon} m_1^2 \tag{5.51}$$

откуда получаем:

$$m^2 = m_1^2 \left(1 + \frac{g}{16\pi^2\varepsilon}\right) \tag{5.52}$$

Вот такой должна быть "затравочная" масса, чтобы в однопетлевом приближении физическая масса равнялась фиксированному значению m_1. Видим, что при $\varepsilon \to 0$ величина m расходится, но конечность m_1 обеспечена!

Аналогичным образом можно рассмотреть и вершину $\Gamma^{(4)}$. Перепишем (5.45) в виде:

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g\mu^\varepsilon + \frac{g^2\mu^\varepsilon\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma - F(s,m,\mu) - F(t,m,\mu) - F(u,m,\mu)\right] \tag{5.53}$$

Определим теперь перенормированную (конечную!) константу связи g_1 соотношением:

$$g_1 = i\Gamma^{(4)}(p_i = 0) \tag{5.54}$$

т.е. через вершину взаимодействия частиц с нулевыми импульсами. Тогда из (5.53) получаем:

$$g_1 = g\mu^\varepsilon + \frac{g^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma - 3F(0,m,\mu)\right] \tag{5.55}$$

Считая g_1 фиксированной конечной величиной, сразу видим, что "затравочную" константу связи g нужно сделать бесконечной (при $\varepsilon \to 0$). В самом деле, перестраивая выражение (5.55) с помощью замен g на g_1 и m на m_1 там где это требуется (что всегда можно сделать с точностью до интересующих нас членов $\sim g^2$), можно получить выражение для g через g_1, аналогичное (5.52):

$$g = g_1\mu^{-\varepsilon} - \frac{3g_1^2\mu^{-2\varepsilon}}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma - F(0,m_1,\mu)\right] \tag{5.56}$$

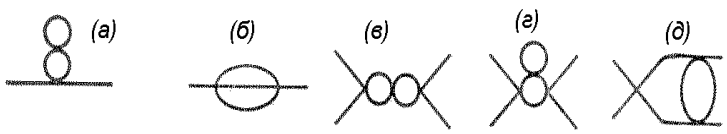


Рис. 5-5

Тогда можно выразить $\Gamma^{(4)}$ (5.53) через g_1 так:

$$i\Gamma^{(4)}(p_i) = g_1 - \frac{g_1^2\mu^{-\varepsilon}}{32\pi^2}[F(s,m_1,\mu) + F(t,m_1,\mu) + F(u,m_1,\mu) - 3F(0,m_1,\mu)] \quad (5.57)$$

Отсюда непосредственно следует (5.54), поскольку при $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ имеем $s = t = u = 0$. Таким образом, физическая (перенормированная) константа связи g_1 совпадает с величиной $i\Gamma^{(4)}$ в точке, где все внешние импульсы равны нулю[6]. Теперь все у нас стало конечным! Мы полностью провели перенормировку в однопетлевом приближении.

Как все это выглядит в двухпетлевом приближении? В этом случае надо рассмотреть диаграммы, показанные на Рис.5-5. Соответствующий анализ показывает, что в этом случае величина $G^{-1}(p) = \Gamma^{(2)}(p)$ приобретает дополнительную расходимость от диаграммы Рис.5-5(б). Эта расходимость не устраняется перенормировкой массы и константы связи. Она поглощается дополнительным мультипликативным фактором, который вводится доопределением перенормированной 2-точечной функции соотношением:

$$G_r^{-1} = \Gamma_r^{(2)} = Z_\varphi(g_1, m_1, \mu)\Gamma^{(2)}(p, m_1) \quad (5.58)$$

Здесь величина $\Gamma_r^{(2)}$ является конечной, а фактор Z_φ – бесконечен. Величина $Z_\varphi^{1/2}$ называется константой перенормировки волновой функции. Для Z_φ можно написать разложение в ряд по числу петель, которое имеет вид:

$$Z_\varphi = 1 + g_1 Z_1 + g_1^2 Z_2 + \ldots = 1 + g_1^2 Z_2 + \ldots \quad (5.59)$$

поскольку однопетлевой вклад отсутствует. Перенормировка волновой функции (амплитуды поля) не может быть совершенно произвольной. Для ее определения нужно потребовать, чтобы в некоторой точке, скажем $p^2 = 0$, выполнялось условие:

$$\frac{\partial}{\partial p^2} G_r^{-1}(p)\,\big|_{p^2=0} = \frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_r^{(2)}\,\big|_{p^2=0} = 1 \quad (5.60)$$

что соответствует $G_r^{-1}(p) = p^2 + \ldots$. Выбор точки $p^2 = 0$ достаточно произволен.

Расходимость Z_φ означает, что в двухпетлевом приближении ранее определенная величина m_1 бесконечна (в пределе $\varepsilon \to 0$). Однако перенормированная $G_r^{-1}(p) = \Gamma_r^{(2)}$ дает конечное значение перенормированной массы m_r:

$$m_r^2 = Z_\varphi m_1^2 \quad (5.61)$$

[6]Это, впрочем, не единственный способ определения пернормированной константы связи. Иногда g_1 определяют через $i\Gamma^{(4)}$ в так называемой симметричной точке $p_i^2 = m^2$, $p_i p_j = -m^2/3$ $(i \neq j)$, что соответствует $s = t = u = 4m^2/3$.

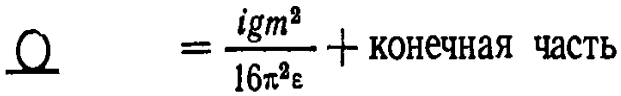


Рис. 5-6

Иначе говоря, расходимости Z_φ и m_1^2 сокращаются. Аналогичным образом изменяется и значение перенормированной константы связи. Для $\Gamma_r^{(4)}$ имеет место соотношение, аналогичное (5.58):

$$\Gamma_r^{(4)} = Z_\varphi^2 \Gamma^{(4)}(p, m_1, \mu) \tag{5.62}$$

и, следовательно, новая перенормированная константа связи g_r, определяемая соотношением, аналогичным (5.49), имеет вид:

$$i\Gamma_r^{(4)}(p_i = 0) = g_r = Z_\varphi^2 g_1 \qquad g_r = Z_\varphi^2 g_1 \tag{5.63}$$

Фактор Z_φ является функцией переменной $g\mu^\varepsilon$, выписывая эту зависимость явно, получаем перенормированную n-частичную вершинную функцию в виде:

$$\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) = Z_\varphi^{n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma^{(n)}(p_i, g, m) \tag{5.64}$$

или

$$\Gamma^{(n)}(p_i, g, m) = Z_\varphi^{-n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) \tag{5.65}$$

Таким образом и в двухпетлевом приближении теория может быть сделана конечной. Сохраняется - ли это важнейшее свойство во всех порядках? Это вопрос *доказательства перенормируемости*. Оно достаточно громоздко, но может быть проведено во всех порядках теории возмущений (Дайсон). Подробно с доказательством перенормируемости в разных моделях теории поля можно познакомиться в книге [4]. Отметим только, что доказательство перенормируемости в теории φ^4 сложнее, чем аналогичное доказательство для КЭД, которое облегчается благодаря калибровочной инвариантности (тождество Уорда).

Контрчлены.

Существует альтернативная точка зрения на перенормировку, которая стала весьма распространена, особенно после появления книги [4]. Она состоит в том, чтобы рассматривать параметры m и g в исходном лагранжиане сразу в качестве физических массы и заряда (константы связи). Из того факта, что этот лагранжиан не дает конечных функций Грина, вытекает требование, что в лагранжиан нужно ввести дополнительные члены, сокращающие расходимости. Их называют *контрчлены*. Перенормируемая теория может быть сделана конечной введением *конечного* числа контрчленов. Рассмотрим кратко, как это делается.

Рассмотрим опять перенормировку массы в однопетлевом приближении, определяемую соотношениями (5.49) – (5.52). Ее можно описать следующим образом. Однопетлевая поправка к свободному пропагатору показана на Рис. 5-6 и расходится при $\varepsilon \to 0$. Добавим к исходному лагранжиану $\mathcal{L}$ член вида:

$$\delta\mathcal{L}_1 = -\frac{gm^2}{32\pi^2\varepsilon}\varphi^2 \equiv -\frac{1}{2}\delta m^2 \varphi^2 \tag{5.66}$$

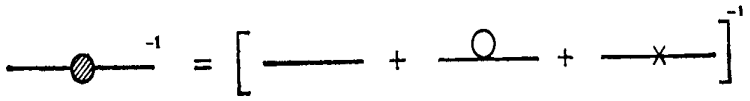


Рис. 5-7

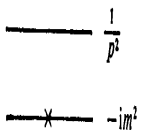


Рис. 5-8

Его можно рассматривать как взаимодействие, которое мы будем изображать на диаграммах "крестиком":

$$\times = -\frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon} = -i\delta m^2 \tag{5.67}$$

Тогда, с точностью $\sim g$, полный обратный пропагатор представляется графиками Рис.5-7 и равен:

$$\Gamma^{(2)}(p) = iG(p)^{-1} = i\left[\frac{1}{i}(p^2-m^2) - \left(\frac{igm^2}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \text{Конечная часть}\right) + \frac{igm^2}{16\pi^2\varepsilon}\right] = \\ = p^2 - m^2 \tag{5.68}$$

где опустили конечный вклад (или включили его в m^2). Здесь m^2 считается конечной величиной, физической массой, которая в соответствующем порядке теории возмущений равна $-\Gamma^{(2)}(0)$. Лагранжиан имеет теперь вид $\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1$, где $\delta\mathcal{L}_1$ – расходящийся контрчлен.

Смысл рассмотрения массового члена в лагранжиане в качестве дополнительного взаимодействия прост. Рассмотрим свободную теорию:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi \tag{5.69}$$

и будем считать, что она описывает безмассовое поле (первый член в лагранжиане) с взаимодействием, определяемым вторым членом. Правила Фейнмана показаны на Рис.5-8. Полный пропагатор тогда определяется графиками, показанными на Рис.5-9. В результате имеем геометрическую прогрессию:

$$G(p) = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}(-im^2)\frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2}(-im^2)\frac{i}{p^2}(-im^2)\frac{i}{p^2} + \ldots = \frac{i}{p^2-m^2} \tag{5.70}$$

т.е. является обычным пропагатором массивного поля. Это и было использовано при рассмотрении массового контрчлена в лагранжиане в качестве возмущения.

Аналогичным образом можно рассмотреть $\Gamma^{(4)}$. Из (5.45) видно, что величина $\Gamma^{(4)}$, соответствующая графикам $\sim g^2$, показанным на Рис.5-10, расходится при $\varepsilon \to 0$. Тогда можно добавить к лагранжиану контрчлен вида:

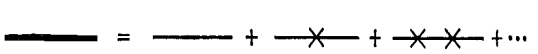
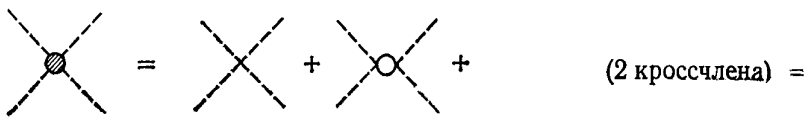


Рис. 5-9



$$= -ig\mu^{\varepsilon}\left(1+\frac{3g}{16\pi^2\varepsilon}\right) + \text{конечная часть}$$

Рис. 5-10

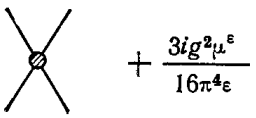


Рис. 5-11

$$\delta\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4!}\frac{3g^2\mu^{\varepsilon}}{16\pi^2\varepsilon}\varphi^4 = \frac{Bg\mu^{\varepsilon}}{4!}\varphi^4 \tag{5.71}$$

так что имеем дополнительное взаимодействие, показанное на Рис.5-11. В результате $\Gamma^{(4)}$ становится конечной, как это показано на Рис. 5-12. Наконец, расходимость $\Gamma^{(2)}$ в двухпетлевом приближении, качественно описанная выше, и приводившая к необходимости умножения величин $\Gamma^{(n)}$ на $Z_{\varphi}^{n/2}$, эквивалентна добавлению к лагранжиану контрчлена вида:

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{A}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 \tag{5.72}$$

где $1 + A = Z_\varphi$.

Итак, конечные выражения для функций Грина и вершин можно получить, добавляя к лагранжиану:

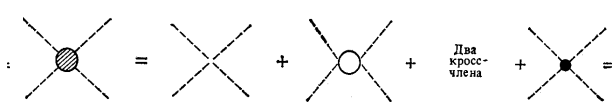
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}g\mu^{4-d}\varphi^4 \tag{5.73}$$

контрчлены $\mathcal{L}_{CT}$:

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{A}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}\delta m^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}Bg\mu^{4-d}\varphi^4 \tag{5.74}$$

Полный лагранжиан, который принято называть "голым" лагранжианом $\mathcal{L}_B$, равен:

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} =$$
$$= \frac{1+A}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}(m^2+\delta m^2)\varphi^2 - \frac{1}{4!}(1+B)g\mu^{4-d}\varphi^4 \tag{5.75}$$



$$= -ig\mu^{\varepsilon} + \text{конечная часть.}$$

Рис. 5-12

Таким образом, добавление контрчленов эквивалентно умножению величин φ, m и g на некоторые перенормировочные множители Z (мультипликативная перенормировка). А именно, если ввести по определению "голые" величины:

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \sqrt{Z_\varphi}\varphi_r \qquad Z_\varphi = 1 + A \\ m_B &= Z_m m_r \qquad Z_m^2 = \frac{m^2 + \delta m^2}{1 + A} \\ g_B &= \mu^\varepsilon Z_g g_r \qquad Z_g = \frac{1 + B}{(1 + A)^2} \end{aligned} \tag{5.76}$$

то "голый" лагранжиан (5.75) примет вид:

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi_B \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m_B^2 \varphi_B^2 - \frac{1}{4!} g_B \varphi_B^4 \tag{5.77}$$

Заметим, что здесь нет *явной* зависимости от μ. Величины A,B и δm^2 подразумеваются подобранными таким образом, чтобы функции Грина теории были конечны (при $\varepsilon \to 0$). на языке контрчленов теория является пернормируемой, если контрчлены, необходимые для сокращения расходимостей в каждом порядке теории возмущений, имеют тот же вид, что и члены, входящие в исходный лагранжиан. Если это имеет место, то "голые" величины могут быть определены при помощи (бесконечных!) перенормировочных множителей, как это сделано выше. При этом "голый" лагранжиан имеет тот же вид, что и исходный.

Лагранжиан $\mathcal{L}_B$ приводит к конечной теории, а исходный $\mathcal{L}$ – нет. Это означает, что "запрятав" все расходимости в φ_B, m_B и g_B можно сделать теорию конечной – расходимости поглощаются перенормировкой. Все "голые" величины расходятся при $\varepsilon \to 0$ [7], тогда как перенормированные величины принимают при $\varepsilon \to 0$ конечные, но произвольные, значения. Их следует отождествить с физическими параметрами теории.

Уравнение (5.65) очевидно и из подхода, основанного на контрчленах. Из (5.76) и (5.77) ясно, что взяв (5.77) в качестве исходного лагранжиана, мы должны во всех формулах для функций Грина заменить $m \to m_B$, $g \to g_B$, $\varphi \to \varphi_B$. Но теперь можно (и нужно!) выразить "голые" параметры через физические m_r, g_r и φ_r согласно формулам (5.76). Тогда получим:

$$\Gamma_B^{(n)}(p_i, g_B, m_B) = Z_\varphi^{-n/2} \Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) \tag{5.78}$$

что эквивалентно (5.65) (индекс B теперь можно убрать). Отсутствие явной зависимости левой части этого уравнения от μ очевидна из формы лагранжиана (5.77), где ее также нет.

Ренормализационная группа.

В Главе 8 части I мы уже кратко обсуждали группу перенормировок (ренорм - группу) в КЭД. Метод ренорм - группы играет огромную роль в квантовой теории поля [4, 8, 10] и статистической физике [14, 15], также, как и в некоторых

[7] При конечных ε проблемы расходимостей нет вообще.

других областях теоретической физики. Поэтому здесь мы проведем более подробное его обсуждение. Надо заметить, что существует целый ряд (фактически эквивалентных) формулировок этого метода. Например в Главе 8 части I преобразования ренорм - группы связывались с переходом от одного значения параметра обрезания расходящихся интегралов к другому, в теории критических явлений часто используется [14] формулировка Вильсона, связанная с последовательным интегрированием по областям импульсного пространства, с переходом к учету все более длинноволновых флуктуаций и т. п. Здесь мы придерживаемся наиболее часто употребляемого в современной литературе по квантовой теории поля (хотя и несколько формального) подхода, основанного на методе размерной регуляризации [8].

В рамках теории размерной регуляризации мы ввели в теорию произвольный параметр μ размерности массы. Зависимость перенормированной 1ЧН-функции от μ определяется, согласно (5.64), соответствующей μ-зависимостью перенормировочного множителя Z_φ. Иными словами (ср.(5.65), (5.78)) неперенормированная ("голая") функция $\Gamma^{(n)}$ не зависит от μ:

$$\Gamma^{(n)}(p_i, g, m) = Z_\varphi^{-n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu) \tag{5.79}$$

и, следовательно, инвариантна относительно группы преобразований:

$$\mu \to e^s \mu \qquad \text{или} \qquad \mu = e^s \mu_0 \qquad \text{т.е.} \qquad s = \ln \frac{\mu}{\mu_0} \tag{5.80}$$

Эти преобразования и образуют ренормализационную группу (ренорм - группу, группу перенормировок). Вводя безразмерный дифференциальный оператор $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$, получим:

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^{(n)} = 0 \tag{5.81}$$

или, учитывая (5.79):

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}[Z_\varphi^{-n/2}(g\mu^\varepsilon)\Gamma_r^{(n)}(p_i, g_r, m_r, \mu)] = 0 \tag{5.82}$$

где g_r и m_r зависят от μ. Проводя дифференцирование и умножая результат на $Z_\varphi^{n/2}$, получаем:

$$\left[-n\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sqrt{Z_\varphi} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{\partial g_r}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial g_r} + \mu\frac{\partial m_r}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial m_r}\right]\Gamma_r^{(n)} = 0 \tag{5.83}$$

В дальнейшем, для краткости, будем везде писать g вместо g_r и m вместо m_r, подразумевая, что имеем дело только с перенормированными величинами. Вообще, в (5.83) входят только перенормированные выражения, конечные при $\varepsilon \to 0$.

Определим следующие функции:

$$\begin{aligned} m\gamma_m(g) &= \mu\frac{\partial m}{\partial\mu} \\ \gamma(g) &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sqrt{Z_\varphi} \\ \beta(g) &= \mu\frac{\partial g}{\partial\mu} \end{aligned} \tag{5.84}$$

Тогда уравнение (5.83) принимает вид:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma(g)+m\gamma_m(g)\frac{\partial}{\partial m}\right]\Gamma^{(n)}=0 \tag{5.85}$$

Это основное уравнение ренормализационной группы, называемое иногда уравнением Каллана - Симанзика. Оно выражает инвариантность перенормированной функции $\Gamma^{(n)}$ относительно замены параметра регуляризации μ.

Запишем теперь аналогичное уравнение, выражающее инвариантность функции $\Gamma^{(n)}$ относительно изменения масштаба импульсов (массы). Пусть производится замена $p_i \to tp_i,\ m \to tm,\ \mu \to t\mu$. Функция $\Gamma^{(n)}$ имеет массовую размерность D, определяемую согласно приведенной выше таблице размерностей, следующим выражением:

$$D=d+n\left(1-\frac{d}{2}\right)=4-n+\varepsilon\left(\frac{n}{2}-1\right) \tag{5.86}$$

где $d=4-\varepsilon$. Тогда имеем:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i,tm,t\mu)=t^D\Gamma^{(n)}(p_i,m,\mu) \tag{5.87}$$

что после простых замен переменных $tm \to \tilde{m},\ m \to \tilde{m}/t,\ \tilde{m} \to m$ и $t\mu \to \tilde{\mu},\ \mu \to \tilde{\mu}/t,\ \tilde{\mu} \to \mu,\ \tilde{m} \to m$, переписывается как:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i,m,\mu)=t^D\Gamma^{(n)}(p_i,m/t,\mu/t) \tag{5.88}$$

Функция $\Gamma^{(n)}$ представляет собой, таким образом, однородную функцию своих переменных со степенью однородности D.

Однородные функции. Теорема Эйлера.

Напомним основные факты об однородных функциях. Функция $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ называется однородной функцией степени p, если для любых t выполняется:

$$u=f(tx_1,...,tx_m)=t^pf(x_1,...,x_m) \tag{5.89}$$

Для однородных функций имеет место теорема Эйлера:

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+x_m\frac{\partial u}{\partial x_m}=pu \tag{5.90}$$

В самом деле, рассмотрим $u=f(tx_1^0,...,tx_m^0)$, где $(x_1^0,...,x_m^0)$ произвольная точка из области определения функции. Тогда имеем:

$$\frac{du}{dt}|_{t=1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}x_1^0+...+\frac{\partial u}{\partial x_m}x_m^0 \tag{5.91}$$

С другой стороны

$$\frac{du}{dt}=pt^{p-1}f(x_1^0,...,x_m^0) \qquad \text{так что}$$

$$\frac{du}{dt}|_{t=1}=pf(x_1^0,...,x_m^0)=pu \tag{5.92}$$

Сравнение (5.91) с (5.92) и дает (5.90).

Из (5.88), по теореме Эйлера, получаем:

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}+m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}-D\right)\Gamma^{(n)}(tp_i,g,m,\mu)=0 \tag{5.93}$$

Исключая $\mu\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial\mu}$ из (5.85) и (5.93), получаем другую запись уравнения Каллана - Симанзика:

$$\left[-t\frac{\partial}{\partial t}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-n\gamma(g)+m(\gamma_m(g)-1)\frac{\partial}{\partial m}+D\right]\Gamma^{(n)}(tp_i,g,m,\mu)=0 \tag{5.94}$$

которая непосредственно выражает результат изменения масштаба импульсов в $\Gamma^{(n)}$ в t раз. Заметим, что если $\beta(g)=\gamma(g)=\gamma_m(g)=0$, то этот результат просто будет определяться *канонической* размерностью D, как и следовало бы ожидать, исходя из "наивного" размерного анализа. Необходимость рассмотрения перенормировок и, следовательно, отличных от нуля функций $\beta(g),\gamma(g),\gamma_m(g)$, связана с наличием взаимодействия, которое приводит к появлению *аномальных* размерностей.

Найдем теперь решение уравнения (5.94). Это уравнение выражает тот факт, что изменение величины t может быть скомпенсировано за счет изменения величин m и g и общего множителя. Предположим, что существуют функции $g(t)$, $m(t)$ и $f(t)$, такие, что:

$$\Gamma^{(n)}(tp,m,g,\mu)=f(t)\Gamma^{(n)}(p,m(t),g(t),\mu) \tag{5.95}$$

Дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(tp,m,g,\mu)=\frac{df(t)}{dt}\Gamma^{(n)}(p,m(t),g(t),\mu)+f(t)\left(\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial\Gamma^{(n)}}{\partial g}\right) \tag{5.96}$$

или, с учетом (5.95):

$$\begin{aligned}t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(tp,m,g,\mu)&=\left(t\frac{df(t)}{dt}+f(t)t\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}+f(t)t\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma^{(n)}(p,m(t),g(t),\mu)=\\&=\left(t\frac{df(t)}{dt}+tf(t)\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}+tf(t)\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}\right)\frac{1}{f(t)}\Gamma^{(n)}(tp,m,g,\mu)\end{aligned} \tag{5.97}$$

что, после переноса левой части направо, сводится к:

$$\left(-t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}+t\frac{\partial m}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m}+t\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma^{(n)}(tp,m,g,\mu)=0 \tag{5.98}$$

Сравним теперь уравнения (5.94) и (5.98). Приравнивая коэффициенты при $\partial/\partial g$ получаем так называемое уравнение Гелл-Манна – Лоу:

$$t\frac{\partial g(t)}{\partial t}=\beta(g) \tag{5.99}$$

Величина $g(t)$ называется "бегущей" константой связи, а функция $\beta(g)$ называется функцией Гелл-Манна – Лоу. Это уравнение играет фундаментальную роль при исследовании асимптотических свойств квантовой теории поля. Зная функцию $\beta(g)$ можно найти $g(t)$. Особый интерес, как мы увидим, представляет асимптотика $g(t)$ при $t\to\infty$. В качестве начального условия для (5.99) имеем условие $g(1)=g$.

Сравнение коэффициентов при $\partial/\partial m$ в (5.94) и (5.98) дает:

$$t\frac{\partial m}{\partial t}=m[\gamma_m(g)-1] \tag{5.100}$$

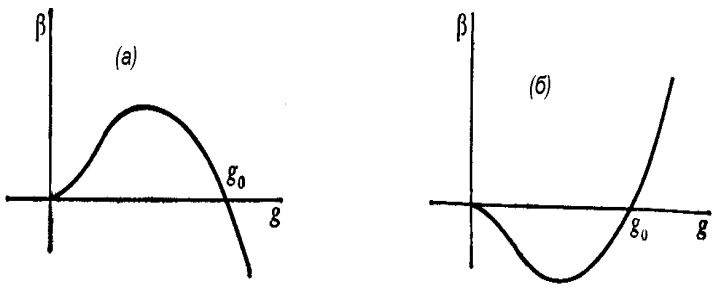


Рис. 5-13

а из сравнения оставшихся членов следует:

$$\frac{t}{f(t)}\frac{df(t)}{dt} = D - n\gamma(g) \tag{5.101}$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать и получить:

$$f(t) = t^D \exp\left[-\int_0^t dt \frac{n\gamma(g(t))}{t}\right] \tag{5.102}$$

подставляя которое в (5.95) и учитывая $D = 4 - n + \varepsilon\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, в пределе $\varepsilon \to 0$ получаем:

$$\Gamma^{(n)}(tp, m, g, \mu) = t^{4-n} \exp\left[-n\int_0^t dt \frac{\gamma(g(t))}{t}\right] \Gamma^{(n)}(p, m(t), g(t), \mu) \tag{5.103}$$

Это и есть решение (5.94), выраженное через "бегущую" константу связи $g(t)$ и "бегущую" массу $m(t)$. Экспоненциальный член определяет аномальную размерность. Таким образом, физика при больших импульсах определяется функциями $g(t)$ и $m(t)$. Соотношения типа (5.103), в некотором смысле, позволяют анализировать ситуацию и вне области применимости теории возмущений.

В пределе очень больших импульсов массами частиц можно пренебречь. Поэтому, обычно весь анализ проводится только с уравнением Гелл-Манна – Лоу (5.99). Рассмотрим характерные возможности, которые тут возникают. Нас будет интересовать поведение $g(t)$ при $t \to \infty$. Уравнение Гелл-Манна – Лоу имеет вид:

$$t\frac{\partial g(t)}{\partial t} = \beta(g) \tag{5.104}$$

Возможные варианты качественного поведения функции $\beta(g)$, которые исчерпывают практически все возможности показаны на Рис.5-13. Условие $\beta(g = 0) = 0$ выполняется всегда, это соответствует теории без взаимодействия. Теория возмущений позволяет, как мы увидим ниже, определить поведение $\beta(g)$ вблизи $g = 0$, оно квадратично по g. В принципе могут существовать и нули $\beta(g)$ при конечных g, нам достаточно рассмотреть лишь один – при $g = g_0$, чтобы понять к каким следствиям приведет его существование. Рассмотрим сначала $\beta(g)$, показанную на Рис.5-13(а). Нули этой функции при $g = 0$ и $g = g_0$ называются *фиксированными точками*. Нетрудно видеть, что при $t \to \infty$ и начальных значениях g вблизи g_0

величина $g(t)$, определяемая из (5.104), стремится к g_0. В самом деле, при начальном $g < g_0$ имеем $\beta(g) > 0$, так что g растет с ростом t и стремится к g_0 (где рост останавливается). Аналогично, при начальном $g > g_0$ имеем $\beta(g) < 0$ и g убывает с ростом t, т.е. также стремится к g_0, двигаясь в отрицательном направлении. Таким образом $g(\infty) = g_0$ – имеем *ультрафиолетово* устойчивую фиксированную точку – фиксированное значение константы связи (заряда) при очень больших импульсах. При малых начальных значениях g в пределе $t \to 0$ всегда имеем $g = 0$ – *инфракрасно* устойчивую фиксированную точку ("московский нуль"). Если нуля функции Гелл-Манна – Лоу при конечных g нет, уравнение (5.104) дает непрерывный рост g при $t \to \infty$, фиксированного значения заряда не возникает. Если при больших значениях аргумента $\beta(g) \sim g^\alpha$ и $\alpha > 1$, то теория становится внутренне противоречивой – неизбежно возникает расходимость g при *конечных* значениях t. При $\alpha \leq 1$ имеем монотонный рост g при $t \to \infty$ – теория непротиворечива, но при $t \to \infty$ имеем переход в область "сильной связи".

Теперь рассмотрим $\beta(g)$, показанную на Рис.5-13(б). Снова имеем две фиксированные точки, однако знак $\beta(g)$ теперь другой, так что $g = g_0$ является инфракрасно устойчивой фиксированной точкой ($t \to 0$), а $g = 0$ – ультрафиолетово устойчивой фиксированной точкой ($t \to \infty$). В последнем случае $g \to 0$ при $t \to \infty$ и взаимодействие уменьшается по мере роста энергии (импульса), обращаясь в пределе в нуль. Это явление называется *асимптотической свободой*. При отсутствии нуля функции $\beta(g)$ при конечных значениях g здесь возникают проблемы в области малых импульсов (больших расстояний) – взаимодействие растет и может иметь нефизическую расходимость. В любом случае, здесь происходит переход к "сильной связи" на больших расстояниях (конфайнмент ?).

Изложенные возможности практически исчерпывают варианты асимптотического поведения в любой модели квантовой теории поля. В качестве конкретного примера рассмотрим теорию $g\varphi^4$ ($g > 0$). Рассмотрим результат однопетлевого приближения (5.55) для перенормированной константы связи. Опуская несущественные конечные поправки можем написать:

$$g_1 = g\mu^\varepsilon \left(1 + \frac{3g}{16\pi^2\varepsilon}\right) \tag{5.105}$$

Отсюда имеем:

$$\mu\frac{\partial g_1}{\partial \mu} = \varepsilon g\mu^\varepsilon + \frac{3g^2}{16\pi^2}\mu^\varepsilon \tag{5.106}$$

При конечных ε тут все конечно и мы можем (с той же точностью) переписать (5.106) как:

$$\mu\frac{\partial g_1}{\partial \mu} = \varepsilon g_1\mu^\varepsilon + \frac{3g_1^2}{16\pi^2}\mu^\varepsilon \tag{5.107}$$

а потом просто опустить индекс 1, считая, что работаем с перенормированной (физической) константой связи. Тогда из (5.107), при $\varepsilon \to 0$, получаем функцию Гелл-Манна – Лоу:

$$\beta(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{3g^2}{16\pi^2} \tag{5.108}$$

Вводя $s = \ln t = \ln \frac{\mu}{\mu_0}$, так что $\mu\frac{\partial}{\partial\mu} = t\frac{\partial}{\partial s}$, перепишем уравнение (5.107) в виде:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{3g^2}{16\pi^2} \tag{5.109}$$

Отсюда и без всякого счета видно, что "бегущая" константа связи теории φ^4 возрастает с ростом s, т.е. с ростом импульса, так что теория не является асимптотически свободной. Функция Гелл-Манна – Лоу $\sim g^2$. Элементарное интегрирование уравнения (5.109) с начальным условием $g(s=0)=g_0$ дает:

$$g = \frac{g_0}{1-\frac{3}{16\pi^2}g_0 s} = \\ = \frac{g_0}{1-\frac{3}{16\pi^2}g_0 \ln t} = \frac{g_0}{1-\frac{3}{16\pi^2}g_0 \ln\frac{\mu}{\mu_0}} \tag{5.110}$$

С ростом t (или μ) константа связи растет и, в конце концов, мы наталкиваемся на нефизическую сингулярность ("ложный" полюс) $1=\frac{3}{16\pi^2}g_0\ln(\frac{\mu}{\mu_0})$, что соответствует $\mu=\mu_0\exp\left(\frac{16\pi^2}{3g_0}\right)$. Ситуация здесь вполне аналогична уже встречавшейся нам в КЭД в Главе 8 части I. Это же поведение подробно рассматривалось нами выше в Главе 2 при обсуждении критических явлений.

Разумеется полученные поведение функции Гелл-Манна – Лоу целиком основано на однопетлевом приближении и формально справедливо только при достаточно малых значениях константы связи g. Вопрос о поведении этой функции при больших значениях константы связи, а с ним и вопрос о непротиворечивости теории $g\varphi^4$, в значительной мере, остается открытым. В ряде работ, для $g\to\infty$ было получено асимптотическое поведение $\beta(g)$, несущественно отличающееся от результатов однопетлевого приближения, что означало-бы внутреннюю противоречивость теории, в соответствии со старой точкой зрения Ландау, обсуждавшейся в Главе 8 части I. Отметим, впрочем, недавнюю работу[8], в которой было получено поведение $\beta(g)\sim g^{0.96}$, которое, в соответствии со сделанными выше замечаниями означает, что эта простейшая модель квантовой теории поля является внутренне непротиворечивой.

Заметим, что теорию $g\varphi^4$ "легко сделать" асимптотически свободной, если считать, что $g<0$. Тогда, очевидно, сменится знак перед логарифмом в знаменателе (5.110) и эффективная константа связи будет падать с ростом t и μ. Однако такая теория неустойчива, у нее нет основного состояния (потенциальная энергия поля может быть сколь угодно большой отрицательной величиной), поэтому в квантовой теории поля она, обычно, не рассматривается. Тем не менее специфический вариант такой модели, сводящийся к обобщенному функционалу Ландау (2.159) с числом компонент поля $n=0$ (!), описывает, как оказывается, движение электрона в случайном поле примесей с точечным потенциалом V, хаотически разбросанных в пространстве со средней плотностью ρ, если в (2.159) считать $g=-\rho V^2$ и $\tau=-E$, где E – энергия электрона. Эта задача тесно связана с еще не до конца решенной проблемой локализации электронов в неупорядоченных системах (одним из основных механизмов перехода металл – диэлектрик). В частности, возникающие здесь проблемы оказываются тесно связанными с проблемой описания инфракрасной области асимптотически свободных моделей квантовой теории поля (конфайнмент). Не имея возможности подробно обсуждать эту задачу в данных лекциях, сошлемся только на имеющиеся обзоры[9].

[8] И.М.Суслов. Письма ЖЭТФ **71**, 315 (2000)

[9] М.В.Садовский. УФН **133**, 223 (1981), И.М.Суслов. УФН **168**, 503 (1998)

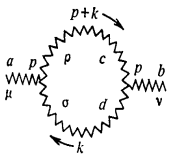


Рис. 5-14

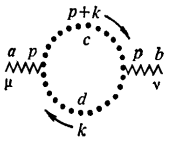


Рис. 5-15

Асимптотическая свобода теорий Янга–Миллса.

Перейдем к рассмотрению асимптотических свойств калибровочных теорий. Ситуация в КЭД была рассмотрена в Главе 8 части I, где было показано, что теория не является асимптотически свободной, что приводит к проблеме "нуля заряда" и патологическому поведению при больших импульсах (энергиях). Замечательно, что в неабелевых калибровочных теориях положение совсем другое. Именно, в них реализуется поведение, названное выше асимптотически свободным. Открытие этого явления Гроссом и Вильчеком в начале 70-х годов открыло путь к построению квантовой хромодинамики и обеспечило возможность проведения надежных расчетов КХД - эффектов при высоких энергиях по теории возмущений.

Здесь мы ограничимся тем, что приведем основные *результаты* для случая $SU(3)$ калибровочной теории (КХД), а также качественную интерпретацию самого явления асимптотической свободы, отсылая читателя за деталями вычислений к имеющимся учебникам [8, 9, 11]. Ключом к нахождению асимптотического поведения является снова функция Гелл-Манна – Лоу $\beta(g)$. В КЭД для ее вычисления в Главе 8 части I рассматривался простейший однопетлевой график поляризации вакуума (фермионная петля). В однопетлевом приближении КХД возникают дополнительные возможности, связанные с неабелевым характером теории (самодействие полей Янга-Миллса и необходимость учета "духов" Фаддеева - Попова). В этом случае мы должны рассчитать вклад в перенормировку заряда от простейшего петлевого графика глюон - глюонного взаимодействия, показанного на Рис.5-14, от взаимодействия глюонов с "духами", показанного на Рис.5-15 и аналогичного КЭД вклада от взаимодействия глюонов с кварками Рис.5-16. В результате довольно громоздких расчетов [8], для перенормированной в однопетлевом приближении константы связи КХД получаем аналог выражения (5.105) в виде:

$$g_1 = g\mu^{\varepsilon/2}\left[1 + \frac{g^2}{4\pi\varepsilon}\left(-11 + \frac{2n_f}{3}\right)\right] \tag{5.111}$$

где n_f – число кварковых "ароматов" (число типов кварков). Аналогичная однопетлевая поправка от электронов в КЭД имеет вид $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{4}{3}\right)$. Знак фермионного

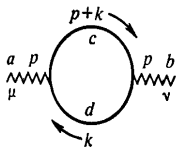


Рис. 5-16

вклада здесь тот же, что и в КЭД. Однако суммарный вклад процессов Рис.5-14 и Рис.5-15 имеет *другой знак*!. Соответственно при $n_f < 16$ общий знак поляризационной поправки в (5.111) *противоположен* таковому в КЭД ("антиэкранировка"). Физическая природа такого поведения будет объяснена ниже, а сейчас, действуя аналогично переходу от (5.105) к (5.108), получаем в пределе $\varepsilon \to 0$:

$$\beta(g) = \mu\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{g^3}{12\pi^2}\left(-33 + 2n_f\right) \tag{5.112}$$

При $n_f < 16$ из (5.112) следует, что $\beta(g) < 0$ и константа связи g *убывает* с ростом масштаба импульсов (масс), в соответствии с качественной картиной, обсуждавшейся выше. Следовательно такая теория является асимптотически свободной. В Природе, как известно, $n_f = 6$.

Получим выражение для "бегущей" константы связи. Вводя опять $s = \ln t = \ln\frac{\mu}{\mu_0}$, $\mu\frac{\partial}{\partial\mu} = t\frac{\partial}{\partial s}$, имеем уравнение Гелл-Манна – Лоу:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = -\eta g^3 \qquad \text{где} \qquad \eta = \frac{33 - 2n_f}{12\pi} \tag{5.113}$$

Перепишем это как:

$$\frac{d}{ds}(g^{-2}) = 2\eta \tag{5.114}$$

Легко видеть, что решение этого уравнения имеет вид:

$$\frac{1}{g^2} = \frac{1}{g_0^2} + 2\eta s \tag{5.115}$$

или

$$g^2 = \frac{g_0^2}{1 + 2g_0^2\eta s} = \frac{g_0^2}{1 + 2g_0^2\eta \ln t} \tag{5.116}$$

Вводя $t = Q/\mu$ и определяя g_0 при $Q = \mu$, получаем результат, цитировавшийся в Главе 8 части I:

$$g^2(Q^2) = \frac{g^2(\mu)}{1 + \frac{g^2(\mu^2)}{12\pi}(33 - 2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} \tag{5.117}$$

Только в мире, где $n_f > 16$ знак в знаменателе (5.117) был бы таким же, как в квантовой электродинамике. В реальном мире эффективный заряд КХД не растет, а *падает* с ростом Q^2 и становится малым на малых расстояниях! Это и есть асимптотическая свобода. При достаточно малых Q^2 (на больших расстояниях между кварками) эффективная константа связи наоборот становится большой, что экспериментально проявляется в явлении *конфайнмента* ("инфракрасная тюрьма").

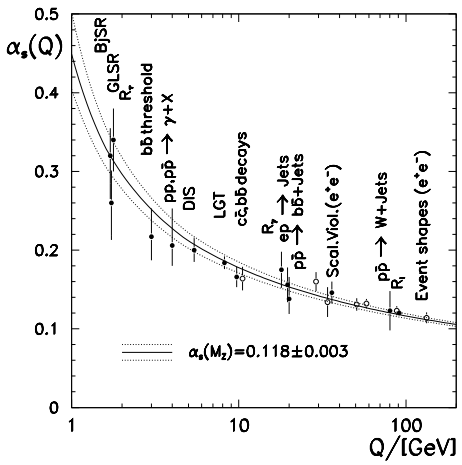


Рис. 5-17

Для значения Q^2, при котором возникает "ложный" полюс в (5.117), введем обозначение Λ^2_{QCD}:

$$\Lambda^2_{QCD} = \mu^2 \exp\left[-\frac{12\pi}{(33-2n_f)g^2(\mu^2)}\right] \tag{5.118}$$

Тогда (5.117) переписывается как:

$$g^2(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2n_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)} \tag{5.119}$$

При $Q^2 \gg \Lambda^2_{QCD}$ эффективная константа связи мала и взаимодействие кварков и глюонов (на малых расстояниях или при больших импульсах) можно описывать по теории возмущений, аналогично взаимодействию электронов и фотонов в КЭД (на больших расстояниях или малых импульсах). При $Q^2 \sim \Lambda^2_{QCD}$ такое описание становится невозможным, а кварки и глюоны объединяются в сильно взаимодействующие кластеры – адроны. Экспериментальное значение Λ лежит в интервале от 0.1 до $0.5\ GeV$. Тогда для экспериментов, проводимых при $Q^2 \sim (30GeV)^2$ из (5.119) получаем $g^2 \sim 0.1$, так что теория возмущения явно применима, как и в КЭД. В пределе больших Q^2 всеми массами кварков можно пренебречь, однако в теорию все равно входит массовый масштаб μ^2, возникший в процессе перенормировки.

Подчеркнем, что теоретический результат (5.119) полностью подтверждается на эксперименте! На Рис.5-17 приводится подборка экспериментальных данных для эффективной константы связи КХД, как функции характерного масштаба энергии - импульса в различных процессах рассеяния, изучавшихся на различных экспериментальных установках[10]. Видим впечатляющее согласие теории и эксперимента.

Антиэкранировка – парамагнетизм янг - миллсовского вакуума.

Как мы видели, асимптотическая свобода связана с свойством антиэкранировки заряда в янг - миллсовском вакууме. Оказывается, что это явление имеет довольно простое физическое объяснение, основанное на известных аналогиях с теорией твердого тела. Последующее изложение, в

[10] M.Schmelling. ArXiv: hep-ex/9701002.

основном, следует работе[11].

Антиэкранировка заряда означает, что вакуум действует как диэлектрическая среда с диэлектрической постоянной $\epsilon < 1$. При этом вакуум квантовой теории поля отличается от обычной поляризуемой среды в одном очень важном пункте – он релятивистски инвариантен. Это означает, что его магнитная проницаемость μ связана с диэлектрической проницаемостью соотношением:

$$\mu\epsilon = 1 \tag{5.120}$$

Действительно, ϵ представляет собой коэффициент при вкладе в действие от электрического поля $\vec{E}\cdot\vec{D} \propto \epsilon F_{oi}F^{oi}$, а μ^{-1} является коэффициентом при вкладе магнитного поля $\vec{B}\cdot\vec{H} \propto \mu^{-1}F_{ij}F^{ij}$. Сумма этих вкладов является релятивистски инвариантной только при выполнении условия $\epsilon = \mu^{-1}$. Это обстоятельство позволяет связать электрические свойства среды с ее магнитными свойствами, которые могут быть двух типов:

1. *Диамагнетизм Ландау ($\mu < 1$).* Заряженные частицы в среде в ответ на внешнее магнитное поле создают ток, который сам индуцирует магнитное поле, направленное противоположно внешнему полю.

2. *Парамагнетизм Паули ($\mu > 1$).* Если частицы обладают магнитными моментами, то они стремятся выстроиться вдоль внешнего поля.

Тогда свойство антиэкранировки янг - миллсовского вакуума можно представить себе как условие $\mu > 1$, т.е. как его парамагнетизм[12]. В конечном итоге, все дело здесь в том, что неабелевы калибровочные поля подчиняются статистике Бозе, а также, в отличие от абелевых фотонов сами обладают зарядом, соответствующим калибровочной симметрии. Подчеркнем, что терминология теории электромагнетизма (за неимением лучшего) используется здесь только по аналогии с $U(1)$ калибровочной теорией (КЭД). В действительности мы, конечно же, имеем в виду заряды, соответствующие $SU(3)$ калибровочной симметрии, т.е. цветовые заряды. Под электрическими и магнитными свойствами мы подразумеваем цветовые электрические и магнитные свойства (поля). Когда мы говорим, что поля Янга - Миллса в КХД (глюоны) обладают зарядом и магнитным моментом, имеется в виду, что они обладают цветовым зарядом и цветовым магнитным моментом. На деле же глюоны электрически нейтральны.

Хорошо известный результат теории металлов состоит в том, что для идеального газа электронов диамагнетизм Ландау, фактически, перекрывается парамагнетизмом Паули, так что полный отклик является парамагнитным [35]. Оказывается, что в теории неабелевых калибровочных полей ситуация аналогична и связана с парамагнитным откликом спинов янг - миллсовских полей.

Стандартный классический лагранжиан неабелевой калибровочной теории имеем вид:

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{16\pi}G^a_{\alpha\beta}G^{a\alpha\beta} + \bar{\psi}(i\gamma^\nu D_\nu - m)\psi + \phi^\dagger(-D_\nu D^\nu - \mu^2)\phi \;+\quad \text{другие вклады}, \tag{5.121}$$

где тензор напряженностей полей определен как $G^a_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A^a_\beta - \partial_\beta A^a_\alpha - g f^{abc}A^b_\alpha A^c_\beta$, а f^{abc} – структурные константы калибровочной группы, ковариантная производная $D_\nu = \partial_\nu + igA^a_\nu \cdot T^a$, а T^a – генераторы группы (например матрицы Паули $\frac{\tau}{2}$ для фундаментального представления $SU(2)$, или матрицы Гелл-Манна – Лоу $\frac{\lambda}{2}$ для фундаментального представления $SU(3)$). Под "другими вкладами" подразумеваются взаимодействия юкавского типа и самодействие скалярных полей, важно, что они не зависят от калибровочного поля. Удобно переопределить $gA \to A$, так чтобы янг - миллсовская константа g входила только в "свободный" лагранжиан калибровочного поля:

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{16\pi^2 g^2}G^a_{\alpha\beta}G^{a\alpha\beta} + \bar{\psi}(i\gamma^\nu D_\nu - m)\psi + \phi^\dagger(-D_\nu D^\nu - \mu^2)\phi \;+\quad \text{другие вклады}, \tag{5.122}$$

где теперь $G^a_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha A^a_\beta - \partial_\beta A^a_\alpha - f^{abc}A^b_\alpha A^c_\beta$ and $D_\nu = \partial_\nu + iA^a_\nu \cdot T^a$ и g осталось только в виде коэффициента в первом слагаемом.

Чтобы рассчитать магнитную восприимчивость вакуума нужно знать изменение плотности его энергии при изменении внешнего магнитного поля. Может показаться, что все определяется

[11] F.Wilczek. Asymptotic Freedom. ArXiv: hep-th/9609099.

[12] Обычная поляризуемая среды, в отличие от этого, может одновременно обладать свойствами диэлектрической экранировки ($\epsilon > 1$) и парамагнетизма ($\mu > 1$). Тем не менее, некоторая историческая ирония состоит в том, что физическое поведение, приводящее к асимптотической свободе, было, фактически, известно Ландау, который внес фундаментальный вклад в квантовую теорию магнетизма, но, в тоже время, подвергал сомнению основы квантовой теории поля, из-за патологического поведения взаимодействия в области больших импульсов.

только первым членом а (5.122): $\frac{1}{8\pi g^2}B^2$. Но это просто классический вклад в энергию, кроме этого в квантовой теории нужно рассмотреть изменение нулевой энергии всевозможных полей, входящих в (5.122), при изменении внешнего магнитного поля. Тут все аналогично теории металлов, где роль вакуума играет заполненная сфера Ферми.

Прежде чем переходить к явным вычислениям, выпишем правильный ответ, дабы проанализировать его смысл и следствия. Оказывается, что вклад нулевых колебаний $\Delta\mathcal{E}$, приводит к тому, что плотность энергии вакуума во внешнем магнитном поле B имеет вид[13]:

$$\mathcal{E}+\Delta\mathcal{E} \;=\; \frac{1}{8\pi g^2(\Lambda^2)}B^2 \;-\; \frac{1}{8\pi}\eta B^2\ln(\frac{\Lambda^2}{B}) \;+\quad \text{конечные вклады}, \tag{5.123}$$

где η было определено выше в (5.113):

$$\eta=\frac{33-2n_f}{12\pi} \tag{5.124}$$

а опущенные члены конечны в пределе $g\to 0$ и $\Lambda\to\infty$. Здесь мы ввели обычный параметр обрезания Λ, т.е. отбросили вклад всех колебаний с волновыми векторами, превышающими Λ. Происхождение обозначения $g^2(\Lambda^2)$ скоро станет ясным.

Представим себе, что параметр обрезания Λ в (5.124) заменяется на меньшее значение Λ'. Тогда нетрудно понять, что все моды колебаний с волновыми векторами в интервале между Λ' и Λ дают вклад в изменение энергии вакуума вклад вида:

$$\delta(\mathcal{E}+\Delta\mathcal{E})=-\frac{1}{8\pi}\eta B^2\ln(\frac{\Lambda^2}{\Lambda'^2})=(\frac{1}{\mu}-1)\frac{1}{8\pi g^2}B^2, \tag{5.125}$$

где во втором равенстве введен вклад в магнитную восприимчивость вакуума от указанных мод, что и является, по сути дела, ее определением.

Отсюда, при малых g, мы имеем:

$$\mu-1=\eta g^2\ln(\frac{\Lambda^2}{\Lambda'^2}), \tag{5.126}$$

где явно выписан вклад в восприимчивость от мод с энергиями (импульсами), лежащими в интервале между Λ' и Λ. Из выражения (5.124) ясно, что здесь, как и в теории металлов, имеется два вклада – первый связан с тенденцией спиновых моментов ориентироваться по полю (парамагнетизм), а второй – с орбитальным движением заряженных частиц (диамагнетизм). Для электронного газа парамагнитный отклик в три раза сильнее диамагнитного [35]. Результат (5.126) показывает, что в КХД ситуация аналогична и $\mu>1$, что, как мы видели, соответствует антиэкранировке электрического заряда. При определении правильного знака надо учитывать, что частицы со спином 1 имеют (глюоны) только две степени свободы (поляризации), а также и то, что вклад фермионов (кварков) в энергию вакуума имеет отрицательный знак (Глава 3 части I), что приводит к уменьшению парамагнитного эффекта. В частности, в КЭД, где абелево электромагнитное поле не обладает самодействием, а весь рассматриваемый эффект обусловлен фермионами, мы и имеем обычную экранировку заряда вакуумом.

Каковы следствия (5.123) для наблюдаемых величин? Нужно, прежде всего, избавиться от произвольного параметра обрезания Λ. Для этого определим эффективную константу связи таким образом, чтобы правая часть (5.123) не зависела от Λ. Для этого нужно, чтобы выполнялось условие:

$$\text{Const} \;\equiv\; \frac{1}{g^2(\Lambda^2)} \;-\; \eta\ln(\frac{\Lambda^2}{B})\;, \tag{5.127}$$

что эквивалентно (5.115). Еще лучше записать это условие в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{d(\ln\Lambda^2)}(\frac{1}{g^2(\Lambda^2)}) \;=\; \eta\;, \tag{5.128}$$

что есть тоже самое, что и уравнение Гелл-Манна – Лоу (5.114). Отсюда видно, что эффективная константа связи уменьшается с ростом параметра обрезания Λ, стремясь к нулю как обратная степень логарифма Λ при $\Lambda\to\infty$, пока в теории не слишком много кварков, т.е. пока $\eta>0$. Это и есть асимптотическая свобода.

Перейдем теперь к более или менее последовательному выводу (5.123). Парамагнитный вклад в η от спиновых проекций $\pm s$ несложно рассчитать следующим образом. Пусть электрический

[13] Заметим, что в нашей системе единиц $[B]=[L^{-2}]=[\Lambda^2]$, кроме того мы везде пользуемся гауссовой системой единиц электродинамики.

заряд равен 1, а гиромагнитное отношение g_m. Поскольку нас интересует вклад мод с очень большими импульсами, то параметр обрезания Λ много больше масс всех частиц, которые поэтому можно рассматривать как безмассовые (игнорируя возникающие при этом инфракрасные расходимости, которые можно устранить, обрезая все встречающиеся далее интегралы по импульсам на нижнем пределе $\sim B$). Включение магнитного поля приводит к сдвигу энергии релятивистской частицы вида [1]: $E^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \to E^2 \pm g_m Bs$. Поэтому, соответствующее изменение энергии нулевых колебаний есть:

$$\Delta\mathcal{E} \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}(\sqrt{k^2+g_msB}+\sqrt{k^2-g_msB}-2\sqrt{k^2})\;. \tag{5.129}$$

Проводя здесь разложение до членов квадратичных по B и выполняя интегрирование по углам, находим:

$$\Delta\mathcal{E} \;=\; -B^2(g_ms)^2\frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\Lambda^2}\frac{dk^2}{k^2} \;=-B^2(g_ms)^2\frac{1}{16\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{B}. \tag{5.130}$$

Это дает парамагнитный вклад в (5.123). Точное значение коэффициента при соответствующем вкладе в (5.123) связано с с групповыми константами $SU(3)$ и мы его не выводим.

Диамагнитный вклад в η вычисляется сложнее. Возьмем вектор - потенциал магнитного поля в калибровке Ландау: $A_y = Bx$. Тогда уравнение Клейна – Гордона, определяющее орбитальное движение релятивистской частицы в магнитном поле, есть:

$$[E^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(\frac{\partial}{\partial y}-iBx)^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}]\phi \;=\; 0\;, \tag{5.131}$$

а его решения имеют вид:

$$\phi \;=\; e^{i(k_2y+k_3z)}\chi_n(x-\frac{k_2}{B}) \tag{5.132}$$

с собственными значениями $E_n^2 = k_3^2 + B(n+\frac{1}{2})$. Здесь χ_n обычная волновая функция гармонического осциллятора с циклотронной частотой $\sqrt{B}$ [29]. Уровни энергии характеризуются целым числом n и импульсом k_3, но вырождены по k_2, как в обычной задаче об уровнях Ландау в магнитном поле [29]. Если рассмотреть состояния в кубе со стороной L, то координата центра осциллятора k_2/B должна удовлетворять неравенству $0 \le k_2/B \le L$, что означает, что в интервале Δk_3 имеется $\Delta k_2\Delta k_3/(2\pi)^2 = \frac{B}{4\pi^2}\Delta k_3$ состояний для фиксированного значения n (для единичного объема $L^3 = 1$). Тогда соответствующий вклад в энергию нулевых колебаний есть:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{B}{(2\pi)^2}\sum_{n=0}^{[\frac{\Lambda^2}{B}-\frac{1}{2}]}\int_{-\infty}^{\infty}dk_3\theta(\Lambda^2-k_3^2-B(n+\frac{1}{2}))\frac{1}{2}\sqrt{k_3^2+B(n+\frac{1}{2})} \equiv \sum_{n=0}^{[\frac{\Lambda^2}{B}-\frac{1}{2}]}f(n+\frac{1}{2}). \tag{5.133}$$

Это выражение довольно громоздкое ввиду наличия суммы по n. Для наших целей достаточно учесть первый нетривиальный вклад в формуле суммирования Эйлера – Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{p}g(n+\frac{1}{2}) \;=\; \int_0^{p+1}dng(n)-\frac{1}{24}(g'(p+1)-g'(0))+... \tag{5.134}$$

поскольку следующие ее члены приводят к вкладам более высокого порядка по B/Λ^2. Применяя (5.134) к (5.133), убеждаемся, что интегральный член не зависит от B, а существенный вклад возникает от производной в нуле:

$$\frac{1}{24}f'(0) = \frac{1}{24}\frac{B}{4\pi^2}2\int_{\sqrt{B}}^{\Lambda}dk_3\frac{B}{2\sqrt{k_3^2}} = \frac{B^2}{2}\frac{1}{96\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{B}. \tag{5.135}$$

Это дает диамагнитную часть (5.123), которая оказывается меньше парамагнитного вклада (5.130), для любых разумных значений g_m и s.

Как уже отмечалось выше, открытие асимптотической свободы в неабелевых калибровочных теория сыграло революционную роль в современной квантовой теории поля и превратило КХД в “респектабельную” теорию, лежащую в основе “стандартной модели”. За последние четверть века теория прошла всестороннюю проверку и, в области ее применимости, всегда подтверждалась экспериментальными данными. Мы не будем здесь обсуждать все эти успехи, ограничившись некоторыми

дополнительными ссылками. Многие аспекты КХД подробно описаны в уже не раз цитировавшейся книге [11]. Довольно детальное изложение математического аппарата КХД в стиле, близком к нашим лекциям, можно найти в [45]. Из нерешенных до конца проблем отметим проблему описания конфайнмента, что тесно связано с необходимостью описания непертурбативных эффектов в КХД на больших расстояния (малых импульсах, в ИК области). Мы кратко обсудим этот вопрос в следующей Главе.

В самое последнее время мощное развитие получило изучение кварк - глюонного вещества в экстремальных условиях высоких температур и плотностей, что весьма существенно для задач астрофизики и космологии, также как и для экспериментов по столкновению тяжелых ядер на уже работающих или строящихся ускорителях. Здесь проявляется целый ряд замечательных аналогий с физикой конденсированного состояния, в частности, большой интерес вызывает теоретическое изучение так называемой *цветовой сверхпроводимости*, возникающей в кварк – глюонном веществе высокой плотности за счет куперовского спаривания кварков, вызванного притяжением за счет обмена глюонами. Достаточно детальное и ясно написанное изложение этих проблем можно найти в [46, 47].

Интересующиеся элементарным обзором успехов современной КХД могут ограничиться чтением популярного мини - обзора[14].

"Бегущие" константы связи и "великое объединение."

Рассматривавшаяся нами в Главе 4 $SU(2) \otimes U(1)$ симметричная объединенная теория электрослабого взаимодействия находится, как и $SU(3)$ инвариантная КХД во впечатляющем согласии с экспериментом. Но действительно - ли она объединяет электромагнитное и слабое взаимодействия? Фактически, $SU(2) \otimes U(1)$ представляет собой произведение двух несвязанных множеств калибровочных преобразований: группы $SU(2)$ слабого изоспина с константой связи g и группы $U(1)$ слабого гиперзаряда с константой связи f. Отношение этих констант связи, введенное в (4.83) как:

$$tg\alpha = \frac{f}{g} \tag{5.136}$$

фактически должно определяться из эксперимента. Если, однако, группы $SU(2)$ и $U(1)$ рассмотреть в качестве подгрупп некоторой более широкой калибровочной группы

$$G \supset SU(2) \otimes U(1), \tag{5.137}$$

то константы g и f могут быть связаны между собой групповыми соотношениями, которые и определят угол Вайнберга α. При этом, часть новых преобразований группы G связывает ранее несвязанные подмножества групп $SU(2)$ и $U(1)$. Естественно попытаться объединить электрослабую симметрию $SU(2)$ и $U(1)$ с цветовой

[14] F.Wilczek. QCD Made Simple. Phys.Today **53**, No.8, 22 (2000)

калибровочной $SU(3)$ симметрией КХД:

$$G \supset SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \tag{5.138}$$

Тогда калибровочные преобразования группы G будут связывать электрослабые константы g и f с рассматривавшейся выше константой связи КХД. В результате *все* известные взаимодействия будут описываться единой калибровочной группой с единой константой взаимодействия g_G, а все наблюдаемые константы известных взаимодействий будут однозначно определяться структурой группы G. Подобные модели называются теориями "великого объединения" (GUT). Таких моделей предложено некоторое количество, ниже мы кратко обсудим их особенности.

Основание для такого описания можно усмотреть и исходя из реального поведения "бегущих" констант связи для известных взаимодействий. Будем обозначать их $g_1(Q)$,$g_2(Q)$ и $g_3(Q)$ соответственно калибровочным группам $U(1)$,$SU(2)$ и $SU(3)$. Во избежании путаницы, введем следующие стандартные обозначения, связывающие g_i $(i = 1, 2, 3)$ с обозначениями констант взаимодействия, использовавшимися нами выше:

$$\begin{aligned} SU(3): &\qquad g^2(Q) = 4\pi g_3^2(Q) \\ SU(2): &\qquad g(Q) = g_2(Q) \\ U(1): &\qquad f(Q) = \frac{1}{C} g_1(Q) \end{aligned} \tag{5.139}$$

Здесь введен (не очень существенный для дальнейшего) коэффициент C, который обычно определяется некоторыми групповыми константами группы G. В частности, тогда и угол α из (5.136) становится функцией Q:

$$tg\alpha(Q) = \frac{1}{C}\frac{g_1(Q)}{g_2(Q)} \tag{5.140}$$

На Рис.5-18 показано поведение "бегущих" констант стандартной модели $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$ в зависимости от $\log_{10}(\mu/GeV)$, полученное исходя их экспериментальных данных и однопетлевых формул, рассматривавшихся выше на примере КЭД и КХД. Видим, что КХД константа g_3 убывает с ростом импульса (асимптотическая свобода), тогда как константы теории электрослабого взаимодействия g_1 и g_2 возрастают. При этом ясно видна тенденция к сближению величин эффективных констант взаимодействия в области $Q \sim 10^{15} GeV$. Можно ожидать, что в истинной теории элементарных частиц при некотором большом значении $Q \sim M_X$ (на малых расстояниях!) все три константы сливаются в одну константу теории "великого" объединения[15]:

$$g_i(Q) = g_G(Q) \qquad \text{при} \qquad Q \geq M_X \tag{5.141}$$

соответствующую калибровочной группе G. При $Q < M_X$ константы $g_i(Q)$ разделяются и, в конце концов, на больших расстояниях переходят в феноменологические константы g_i, описывающие наблюдаемые взаимодействия на нынешнем уровне экспериментальных возможностей при $Q \sim \mu \sim 10\ GeV$. Подобное поведение констант взаимодействия получается в некоторых моделях, обобщающих стандартную модель с учетом суперсимметрии (симметрии, преобразования которой переводят фермионы в бозоны и наоборот). Пример поведения "бегущих" констант

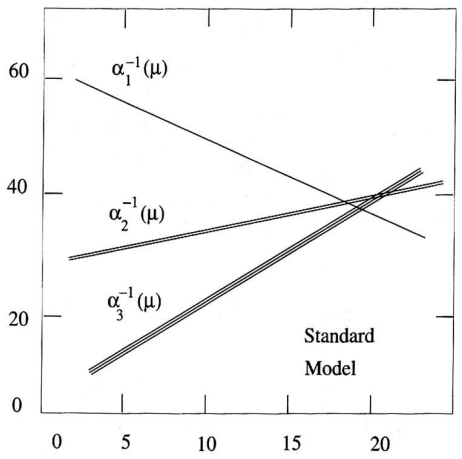


Рис. 5-18

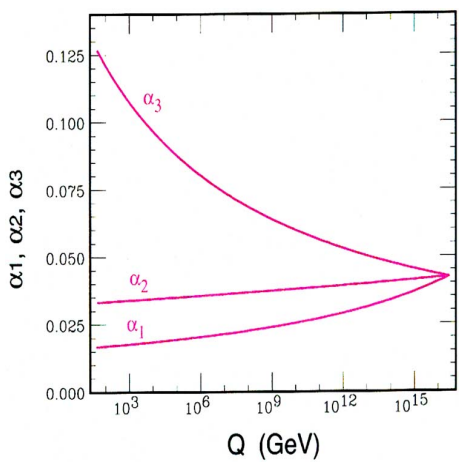


Рис. 5-19

связи, получающегося в подобных моделях, показан на Рис.5-19. Возможность получить такое поведения эффективных констант связи считается сильным аргументом в пользу теорий с суперсимметрией. Заметим, однако, что суперсимметрия в Природе заведомо сильно нарушена и пока нет экспериментальных свидетельств в пользу ее существования. В частности, пока неизвестно существуют - ли частицы – суперпартнеры известных частиц.

Предполагая существование группы "великого объединения" G и используя феноменологические значения констант взаимодействия, определенные при $Q \sim \mu \sim m_W$ можно оценить массу M_X более аккуратно. Для КХД константы g_3, используя (5.113) – (5.117), можем написать:

$$\frac{1}{g_3^2(\mu)} = \frac{1}{g_3^2(Q)} + 2b_3 \ln \frac{Q}{\mu} \tag{5.142}$$

где ввели

$$b_3 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{3}n_f - 11\right), \tag{5.143}$$

отличающуюся от использованной выше величины η знаком и постоянным множителем. При $Q = M_X$ имеем $g_3 = g_G$, так что из (5.142) получаем:

$$\frac{1}{g_i^2(\mu)} = \frac{1}{g_G^2} + 2b_i \ln \frac{M_X}{\mu} \qquad \text{где} \qquad i = 3 \tag{5.144}$$

Это же соотношение можно применить и к константам взаимодействия g_1, g_2 групп $SU(2)$ и $U(1)$, причем:

$$b_1 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{4}{3}n_g\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(-\frac{22}{3}\right) + b_1 \tag{5.145}$$

$$b_3 = \frac{1}{(4\pi)^2}(-11) + b_1 \tag{5.146}$$

где n_g – число типов фермионов в рассматриваемой модели. В общем случае группы $SU(N)$ имеем:

$$b_N = \frac{1}{(4\pi)^2}\left(-\frac{11}{4}N + \frac{4}{3}n_g\right) \tag{5.147}$$

где первый член связан с вкладом петли калибровочных бозонов, а второй с петлями фермионов.

Исключая n_g и g_G из трех уравнений типа (5.146) и используя (5.147), составим следующую линейную комбинацию:

$$\frac{C^2}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} - \frac{1-C^2}{g_3^2} = 2[C^2 b_1 - b_2 - (1+C^2)b_3] \ln \frac{M_X}{\mu} \tag{5.148}$$

где $g_i^2 = g_i^2(\mu)$. Левая сторона тут подобрана так, чтобы ее можно было выразить через e^2 и g_3^2. В самом деле, имеем:

$$\frac{C^2}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} = \frac{1}{f^2} + \frac{1}{g^2} = \frac{1}{e^2} \tag{5.149}$$

[15] В этой области угол Вайнберга, в соответствии в (5.140), определяется групповым коэффициентом C.

где использовали (5.140) и известные формулы электрослабой теории $e = g\sin\alpha = f\cos\alpha$. Подставляя коэффициенты b_i из (5.146) в (5.148), получим:

$$\ln\frac{M_X}{\mu} = \frac{3(4\pi)^2}{22(1+3C^2)}\left[\frac{1}{e^2} - \frac{1+C^2}{g_3^2}\right] \tag{5.150}$$

При $\mu \sim 10\ GeV$ имеем $e^2 \sim 10^{-2}$ и $g_3^2 \sim 0.1$. Полагая[16] $C^2 = 5/3$ получаем

$$M_X \sim 5\cdot 10^{14}\ GeV \tag{5.151}$$

Эта оценка, как нетрудно видеть, не очень чувствительна к выбору μ и к точному значению C. Масса M_X очень велика, но не настолько, чтобы надо было учитывать гравитацию[17].

Минимальная группа, удовлетворяющая условию

$$G \supset SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1) \tag{5.152}$$

– это группа $SU(5)$. На ее использовании основана простейшая модель GUT (Джорджи – Глэшоу). Какие калибровочные бозоны возникают в этой теории? В общем случае $SU(N)$-симметричной калибровочной теории имеется N^2-1 калибровочных бозонов. Соответственно, для $SU(5)$ имеем:

$$24 = (8,1)_{\text{Глюоны}} + [(1,3)+(1,1)]_{W,Z,\gamma} + [(3,2)+(\bar3,2)]_{X,Y} \tag{5.153}$$

Таким образом в теории возникают сверхтяжелые бозоны X и Y. Они обладают цветом и являются посредниками взаимодействий, переводящих кварки в лептоны:

$$(u,d)_L \to e_L^+ + (\bar Y, \bar X) \tag{5.154}$$

что, в частности, приводит к неизбежности распада протона[18]. При $Q \sim M_{X,Y}$ сильное цветовое взаимодействие смешивается с электрослабым и четкое разделение частиц на цветные кварки и бесцветные лептоны пропадает.

Фермионы в $SU(5)$ модели размещаются по фундаментальным представлениям $\bar5$ и 10. В явном виде, для левых состояний имеем:

$$\begin{aligned} \bar5 &= (1,2)+(\bar3,1) = (\nu_e, e^-)_L + \bar d_L \\ 10 &= (1,1)+(\bar3,1)+(3,2) = e_L^+ + u_L^+ + (u,d)_L \end{aligned} \tag{5.155}$$

Теоретические оценки времени жизни протона дают:

$$\tau_p \sim \frac{M_X^4}{m_p^5} \tag{5.156}$$

---

[16] Это следует из (5.140) и $\sin^2\alpha \approx 0.2$. В общем случае из (5.140) имеем: $\sin^2\alpha = \frac{g_1^2(Q)}{g_1^2(Q)+C^2 g_2^2(Q)}$. Если взять $C^2 = 5/3$, то при $Q = M_X$, т.е. при $g_1 = g_2$, получим $\sin^2\alpha = 3/8$. Но при $Q \approx \mu$ величина $\sin^2\alpha$ уже другая из-за $g_1 \neq g_2$..

[17] Учет гравитации становится важным при $\frac{GM^2}{r}|_{r=\frac{\hbar}{Mc}} \sim Mc^2$, что дает планковскую массу $M_P c^2 \sim \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2} \sim 1.2\cdot 10^{19}\ GeV$.

[18] Распад протона не столь неожидан, как может показаться. Сохранение электрического заряда связано с существованием безмассового фотона, но, ведь, по-видимому, не существует безмассовых частиц, ответственных за сохранение барионного заряда (см. Главу 2 части I).

Видно, что его численное значение очень чувствительно к точному значению M_X. Оно лежит в интервале $10^{30} - 10^{32}$ лет! Современная экспериментальная граница: $\tau_p > 10^{32}$ лет. Это, по-видимому, позволяет отбросить простейшую $SU(5)$ модель "великого объединения". Однако существуют более сложные модели GUT, в которых время жизни протона существенно больше. К сожалению, в настоящее время не видно экспериментальных возможностей поиска распадов протона со временем жизни, существенно превышающим 10^{32} лет. В этом смысле, а также ввиду огромного масштаба массы M_X, все GUT модели, до некоторой степени, представляют собой "игру" теоретиков. Тем не менее, чисто теоретические соображения заставляют вести активные исследования в этом направлении [48].

Глава 6

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ

Теория поля на решетке.

Все предыдущее рассмотрение теории взаимодействующих полей было основано на том или ином варианте теории возмущений. По сути дела, это единственный универсальный метод анализа соответствующих задач. В тоже время ясно, что в квантовой теории поля существует целый ряд проблем, последовательное решение которых невозможно без развития методов, не использующих теорию возмущений. В частности, такие задачи возникают при исследовании асимптотических свойств квантовой теории поля, где выход за рамки теории возмущений необходим при попытках восстановления вида функции Гелл - Манна – Лоу. Из физических проблем здесь основной является, конечно, проблема последовательного описания явления конфайнмента кварков. Достаточно очевидно, что никакого универсального метода выхода за рамки теории возмущений просто не существует. Вместе с тем, в квантовой теории поля развит ряд подходов, которые позволяют проанализировать некоторые непертурбативные эффекты. В связи с этим в теории возник ряд важных концепций, значение которых выходит за рамки собственно квантовой теории поля. В этой Главе мы остановимся на ряде таких задач, имея в виду проиллюстрировать, главным образом, именно эту концептуальную сторону дела.

Очень важное направление современной квантовой теории связано с рассмотрением калибровочных полей на решетке. Оно было предложено в начале 70-х

годов Вильсоном и, по сути дела, является единственным методом, позволяющим достаточно полно решить проблему конфайнмента. В этом подходе вместо обычного пространственно – временного континуума вводится дискретное пространство - время[1]. При этом автоматически отпадает проблема полевых расходимостей, поскольку возникает естественное их обрезание – длина волн в решетке не может быть меньше удвоенной постоянной решетки a, соответственно область изменения импульсов ограничена величиной $\frac{\pi}{a}$ (хорошо известная из теории твердого тела зона Бриллюэна). В такой формулировке квантовая теория поля во многом аналогична статистической механике решеточных систем, где существуют хорошо разработанные методы, позволяющие, иногда, решать задачи и не по теории возмущений. В частности, в решеточных моделях можно эффективно использовать численные расчеты методом Монте - Карло. В нашем изложении мы, в основном, следуем книге [11], более подробное рассмотрение решеточных моделей в квантовой теории поля можно найти в [49] и в хорошем обзоре [50].

Ниже мы будем рассматривать только евклидову формулировку квантовой теории поля на решетке, хотя существуют и методы анализа моделей с явным выделением временных зависимостей. Будем рассматривать только простую кубическую решетку с постоянной a четырехмерном пространстве. Узлы решетки будем параметризовать 4-вектором n. Тогда четырехмерное интегрирование заменяется суммированием:

$$\int d^4x \ldots \to a^4 \sum_n \ldots \tag{6.1}$$

Скалярные поля.

Рассмотрим простейший случай скалярного поля $\phi(x)$. Действие соответствующей теории в непрерывном евклидовом пространстве имеет вид:

$$S(\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right] \tag{6.2}$$

где

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \tag{6.3}$$

Скалярное поле существует в каждом узле решетки n:

$$\phi(x) = \phi_n \tag{6.4}$$

Производная поля определяется на решетке как:

$$\partial_\mu \phi(x) \to \frac{1}{a}(\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n) \tag{6.5}$$

где $\hat{\mu}$ – 4-вектор длины a в направлении μ.

Для действия на решетке соответственно имеем:

$$S(\phi) = \sum_n \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_{\mu=1}^{4} (\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n)^2 + a^4 \left(\frac{m^2}{2} \phi_n^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_n^4 \right) \right\} \tag{6.6}$$

[1] Как не раз указывалось выше, введение решетки нарушает релятивистскую инвариантность теории, но для задач, которые будут здесь обсуждаться, это не так уж и важно – основной интерес представляет, например, поведение КХД на больших расстояниях, когда о решетке можно просто "забыть".

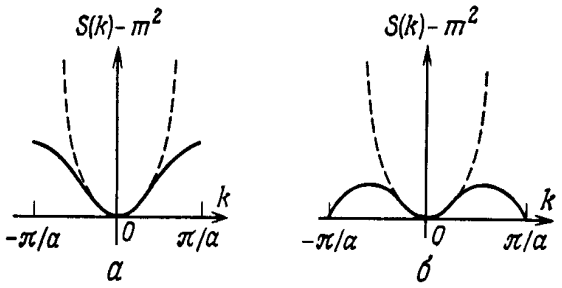


Рис. 6-1

Полезно перейти в импульсное представление и определить спектр возбуждений свободной теории ($\lambda = 0$). Воспользуемся разложением Фурье:

$$\phi_n = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot n}\phi(k) \tag{6.7}$$

Поскольку рассматривать длины волн меньше удвоенной постоянной решетки a не имеет смысла, интегрирование в (6.7) проводится по зоне Бриллюэна обратной решетки, т.е.

$$-\frac{\pi}{a} \le k_\mu \le \frac{\pi}{a} \qquad \text{для каждого} \qquad \mu = 1, ..., 4 \tag{6.8}$$

Здесь $k_\mu \equiv k \cdot \hat{\mu}$. После подстановки (6.7) в (6.6) члены, получающиеся из "кинетической" энергии, запишутся в следующем виде:

$$a^4 \sum_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{i(k+k')\cdot n}(e^{iak_\mu} - 1)(e^{iak'_\mu} - 1) =$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}(e^{iak_\mu} - 1)(e^{-iak_\mu} - 1) = 4\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right) \tag{6.9}$$

так что действие свободной теории принимает вид:

$$S_0(\phi) = \frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\sum_\mu \frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2} + m^2\right)\phi(-k)\phi(k)\right\} \tag{6.10}$$

Таким образом каждая мода дает в действие вклад вида:

$$S(k) = m^2 + \sum_\mu \frac{4}{a^2}\sin^2\left(\frac{ak_\mu}{2}\right) \tag{6.11}$$

вместо стандартного $m^2 + k^2$. Тем не менее оба этих выражения имеют один и тот же непрерывный предел, поскольку они совпадают при малых k, в этом смысле все благополучно. Полученный спектр показан на Рис.6-1(а).

Теория с решеточным действием (6.6) может быть проквантована с помощью формализма функционального интегрирования, в рамках которого вакуумное среднее дается формулой[2]:

$$< 0|\phi_{n1}\phi_{n2}...\phi_{nl}|0 >= \frac{1}{Z}\int \prod_n [d\phi_n](\phi_{n1}\phi_{n2}...\phi_{nl})e^{-S[\phi]} \tag{6.12}$$

[2]В евклидовой теории не имеет смысла писать знак T-упорядочения!

где

$$Z = \int \prod_n [d\phi_n] e^{-S[\phi]} \tag{6.13}$$

Это типичная статистическая механика поля (параметра порядка) ϕ_n на решетке! Величина $S[\phi]$ – соответствующая флуктуационная свободная энергия. Выражение (6.12) представляет собой корреляционную этого параметра порядка, заданного на разных узлах. Полезно сравнить эти выражения с (2.159), (2.161) и (2.163), использовавшимися выше при рассмотрении теории критических явлений.

Проведем здесь замену переменной (изменим масштаб полей):

$$\phi'_n = \sqrt{\lambda}\phi_n \tag{6.14}$$

Тогда решеточное действие принимает вид:

$$S(\phi) = \frac{1}{\lambda} S'(\phi') \tag{6.15}$$

где:

$$S(\phi') = \sum_n \left\{ \frac{a^2}{2} \sum_\mu (\phi'_{n+\mu} - \phi'_n)^2 + a^4 \left(\frac{m^2}{2}\phi'^2_n + \frac{1}{4}\phi'^4_n \right) \right\} \tag{6.16}$$

так что константа взаимодействия λ стала общим множителем для всего действия. Тогда (6.12) и (6.13) переписываются в виде:

$$< 0|\phi'_{n1}\phi'_{n2}...\phi'_{nl}|0 >= \frac{1}{Z'} \int \prod_n [d\phi'_n](\phi'_{n1}\phi'_{n2}...\phi'_{nl}) \exp\left\{ -\frac{1}{\lambda} S[\phi] \right\} \tag{6.17}$$

$$Z = \int \prod_n [d\phi'_n] \exp\{-S'[\phi']\} \tag{6.18}$$

Если здесь заменить

$$\frac{1}{\lambda} \to \beta = \frac{1}{T} \tag{6.19}$$

где T – температура, то разложение *сильной связи* в квантовой теории поля, которое нужно вести по *обратным* степеням константы связи λ, оказывается эквивалентным *высокотемпературному* разложению статистической механики. Это открывает довольно широкие возможности для изучения таких разложений, поскольку метод высокотемпературных разложений в применении к решеточным моделям статистической механики разработан довольно хорошо и широко используется в численном исследовании, например, критических явлений [51, 52].

Фермионные поля.

Перейдем к рассмотрению фермионов. Процедура, аналогичная той, которая использовалась в случае скалярных полей, приводит к евклидову решеточному действию для системы свободных фермионов следующего вида:

$$S_0(\psi) = \sum_n \left\{ \frac{a^3}{2} \sum_{\mu=1}^{4} \bar{\psi}_n \gamma_\mu (\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}}) + m a^4 \bar{\psi}_n \psi_n \right\} \tag{6.20}$$

где γ-матрицы евклидовой теории удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \tag{6.21}$$

В импульсном представлении действие (6.20) записывается в виде:

$$S_0(\psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-k) \left\{ i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m \right\} \psi(k) \tag{6.22}$$

По сравнению с непрерывным случаем происходит замена $\gamma_\mu k_\mu \to \gamma_\mu \frac{1}{a} \sin ak_\mu$. Аналогично тому, как в обычной (евклидовой) теории Дирака $\gamma_\mu k_\mu + m$ дает спектр $k^2 + m^2$, в данном случае имеем спектр возбуждений вида:

$$S(k) = \frac{\sin^2 ak_\mu}{a^2} + m^2 \tag{6.23}$$

показанный на Рис.6-1(б). Видим, что в этом случае в зоне Бриллюэна имеется два одинаковых минимума. Один из них, при $k = 0$, приводит к правильному непрерывному пределу. Другая мода, соответствующая минимуму при $k \pm \frac{\pi}{a}$, обладает при $a \to 0$ бесконечным импульсом, а при конечных a может быть возбуждена. Соответственно, требуется некоторая модификация теории, не влияющая на непрерывный предел, но устраняющая вклад второго минимума. Вильсон предложил добавить к решеточному лагранжиану следующий вклад:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2a} \bar{\psi}_n (\psi_{n+\hat{\mu}} + \psi_{n-\hat{\mu}} - 2\psi_n) \tag{6.24}$$

так что в евклидовом пространстве действие свободных фермионов принимает вид:

$$S_0(\psi) = \sum_n \left\{ \frac{a^3}{2} \sum_\mu \bar{\psi}_n [(1+\gamma_\mu)\psi_{n+\hat{\mu}} + (1-\gamma_\mu)\psi_{n-\hat{\mu}} - 2\psi_n] + ma^4 \bar{\psi}_n \psi_n \right\} \tag{6.25}$$

В импульсном представлении имеем:

$$S_0(\psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-k) \left\{ i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m - \sum_\mu \frac{\cos ak_\mu - 1}{a} \right\} \psi(k) \tag{6.26}$$

Это действие обладает тем свойством, что нежелательный минимум поднимается на ненулевые энергии, тогда как поведение теории при малых k не изменяется. Соответственно, в непрерывном пределе остается только вклад "правильного" минимума при $k = 0$.

Локальная калибровочная инвариантность.

Построим теперь решеточную калибровочную теорию. Для конкретности имеем в виду $SU(3)$-симметричную КХД. Локальное (зависящее от узла!) калибровочное преобразование запишем в виде:

$$\psi_n \to \Phi_n \psi_n \qquad \bar{\psi}_n = \bar{\psi}_n \Phi_n^+ \tag{6.27}$$

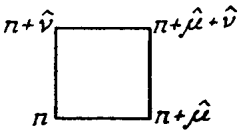


Рис. 6-2

где

$$\Phi_n = \exp\left\{i\frac{\lambda^i}{2}\theta_n^i\right\} \tag{6.28}$$

Здесь λ^i $(i = 1, 2, ..., 8)$ – матрицы Гелл-Манна (генераторы группы $SU(3)$).

Введем теперь так называемую *реберную* переменную, заданную на решеточной связи, соединяющей соседние узлы:

$$U(n+\hat{\mu}, n) = \exp\left\{iga\frac{\lambda^i}{2}A_{n\mu}^i\right\} \tag{6.29}$$

где $A_{n\mu}^i$ – решеточное поле глюонов, g – янг-миллсовская константа связи. Закон калибровочного преобразования этой матрицы определим как:

$$U(n+\hat{\mu}, n) \rightarrow \Phi_{n+\hat{\mu}} U(n+\hat{\mu}, n)\Phi_n^+ \tag{6.30}$$

Из (6.27) и (6.30) следует, что комбинация $\bar{\psi}_n U(n, n+\hat{\mu})\psi_{m+\hat{\mu}}$ является калибровочно инвариантной. Отсюда ясно, как нужно модифицировать действие (6.25), чтобы получить кварковую часть $SU(3)$-симметричного действия КХД:

$$S_{QCD} = S(q) + S(A) \tag{6.31}$$

$$S(q) = \sum_n \left\{\frac{a^3}{2}\sum_\mu \bar{\psi}_n[(1+\gamma_\mu)U(n, n+\hat{\mu})\psi_{n+\hat{\mu}} + \right.$$
$$\left. + (1-\gamma_\mu)U(n, n-\hat{\mu})\psi_{n-\hat{\mu}} + 2\psi_n] - ma^4\bar{\psi}_n\psi_n\right\} \tag{6.32}$$

В непрерывном пределе $a \rightarrow 0$ разложение выражения (6.32) в ряд по степеням a дает обычное выражение для фермионного действия, в котором возникают ковариантные производные калибровочной теории.

Как должно выглядеть решеточное действие для самого калибровочного (глюонного) поля? Ясно, что оно должно строиться из реберных переменных. Простейшая калибровочно инвариантная комбинация определяется на элементарном квадратике (грани, или, как ее еще называют, плакете) решетки, показанном на Рис.6-2. Составим матричное произведение реберных переменных, взятых вдоль связей на плакете p:

$$U_p = U(n, n+\hat{\mu})U(n+\hat{\mu}, n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U(n+\hat{\mu}+\hat{\nu}, n+\hat{\nu})U(n+\hat{\nu}, n) \tag{6.33}$$

Эта комбинация, очевидно, является инвариантной относительно преобразований (6.30). Введем действие калибровочного поля в виде следующей суммы по всем плакетам на решетке:

$$S(A) = -\frac{1}{2g^2}\sum_p SpU_p \tag{6.34}$$

Здесь шпур от произведения берется по индексам матриц $SU(3)$. Если в экспонентах, входящих в (6.33), (6.34), провести разложение по степеням a и отбросить члены $O(a^3)$, выражение (6.34) можно переписать в виде:

$$S(A) = -\frac{1}{16\pi g^2}\sum_p Sp\{\exp(ia^2 F_{n\mu\nu})\} \tag{6.35}$$

где

$$F_{n\mu\nu} = \partial_\mu A_{n\nu} - \partial_\nu A_{n\mu} - ig[A_{n\mu}, A_{n\nu}] \tag{6.36}$$

где введено обозначение:

$$\partial_\mu A_{n\nu} \equiv \frac{1}{a}(A_{n+\hat{\mu}\nu} - A_{n\nu}) \tag{6.37}$$

причем $A_{n\mu} = A^i_\mu \lambda^i/2$ – глюонное поле в узле n. Отсюда сразу же возникает правильный непрерывный предел:

$$S(A) = -\frac{1}{16\pi g^2}\sum_p \left\{1 - \frac{a^4}{2}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} + ...\right\} \to \frac{1}{16\pi}\int d^4x F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu} \tag{6.38}$$

где, в процессе вывода, использовались свойства $Sp\lambda^i = 0$ и $Sp(\lambda^i\lambda^j) = 2\delta^{ij}$.

Критерий конфайнмента. Петля Вильсона.

Чтобы ввести критерий конфайнмента (удержания) кварков в КХД, можно найти энергию системы, состоящей из кварка, находящегося в точке $x = (t, \mathbf{0})$ и антикварка, находящегося в точке $x = (t, \mathbf{R})$. В случае отсутствия удержания, с очевидностью, имеем:

$$E(R) \to 2m \qquad \text{при} \qquad R \to \infty \tag{6.39}$$

где m – масса кварка. Наличие удержания означает, что межкварковый потенциал безгранично растет:

$$E(R) \to \infty \qquad \text{при} \qquad R \to \infty \tag{6.40}$$

Будем обозначать фермионное поле кварков $q(x)$ и введем калибровочно инвариантный $q\bar{q}$-оператор вида:

$$\Gamma[x, x'; C] = \bar{q}(x')U(x', x; C)q(x) \tag{6.41}$$

где $U(x', x; C)$ – упорядоченное произведение реберных переменных вдоль некоторого пути (траектории) C, связывающего точки x и x' на решетке[3]. Рассмотрим калибровочно инвариантный коррелятор, описывающий перекрытие $q\bar{q}$ состояния в момент (евклидова!) времени $t = 0$ и $q\bar{q}$ состояния в момент времени $t = T$:

$$\Omega(T, R) = <0|\Gamma^+[(0, \mathbf{0}), (0, \mathbf{R}); C]\Gamma[(T, \mathbf{0}), (T, \mathbf{R}); C]|0> \tag{6.42}$$

"Вставляя" между операторами представление единицы (условие полноты!) через сумму по полной системе собственных состояний энергии рассматриваемой системы, получаем (ср. использование аналогичного приема в Главе 1):

$$\Omega(T, R) = \sum_n |<0|\Gamma^+[(0, \mathbf{0}), (0, \mathbf{R}); C]|0>|^2 e^{-E_n T} \tag{6.43}$$

[3] В непрерывном пределе: $U(x', x) = P\exp\left\{ig\int_x^{x'} dy^\mu \frac{\lambda^i}{2}A^i_\mu(y)\right\}$, где P – оператор упорядочения вдоль пути C.

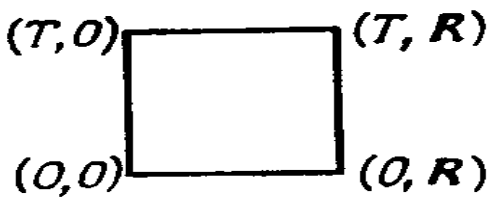


Рис. 6-3

Видим, что при больших T основной вклад дает слагаемое с наименьшим E_n. Это наименьшее собственное значение энергии очевидно соответствует *потенциальной* энергии $q\bar{q}$ системы, в которой кварк и антикварк находятся на расстоянии R друг от друга:

$$\lim_{T\to\infty} \Omega(T,R) \sim e^{-E(R)T} \tag{6.44}$$

В терминах кварковых полей имеем:

$$\Omega(T,R) =< 0|\bar{q}(0,\mathbf{R})U[(0,\mathbf{R}),(0,\mathbf{0});C]q(0,\mathbf{0})\bar{q}(T,\mathbf{0})U[(T,\mathbf{0}),(T,\mathbf{R});C]q(T,\mathbf{R})|0> \tag{6.45}$$

Если рассмотреть кварки как очень тяжелые (классические, c-числовые) внешние источники и рассмотреть путь C в виде замкнутого прямоугольника, показанного на Рис.6-3, выражение (6.45) можно переписать как:

$$\Omega(T,R) \sim e^{-2mT} W(C) \sim e^{-E(R)T} \tag{6.46}$$

где

$$W(C) =< 0|SpU[x,x';C]|0> \tag{6.47}$$

определяет так называемую петлю Вильсона. Именно поведение коррелятора $W(C)$ и определяет наличие или отсутствие конфайнмента. В самом деле, из (6.46) ясно, что:

$$\lim_{T\to\infty} W(C) \sim \exp\{-T[E(R)-2m]\} \tag{6.48}$$

Как мы увидим ниже, в пределе сильной связи ($g \to \infty$) в решеточной теории в решеточной теории можно показать, что вильсоновская петля удовлетворяет *закону площади*, так что для достаточно большого контура C имеем:

$$W(C) \sim \exp\{-KA(C)\} \tag{6.49}$$

где K – некоторая константа, а $A(C)$ – площадь, охватываемая на решетке контуром C (т.е. минимальная площадь поверхности, границей которой является C). Например, для прямоугольного контура Рис.6-3, имеем:

$$A(C) = TR \tag{6.50}$$

Но тогда из (6.48), (6.49) и (6.50) получаем:

$$T[E(R)-2m] \sim KTR \qquad \text{или} \qquad E(R)-2m \sim KR \tag{6.51}$$

т.е. линейно растущий с R потенциал взаимодействия в системе $q\bar{q}$, что, очевидно, соответствует конфайнменту. Коэффициент R называется коэффициентом натяжения струны (силой конфайнмента). Название это связано с тем, что для возникновения линейно растущего потенциала глюонное поле между кварками должно

собраться в трубку – "струну". Эта струна вытягивается следом за кварками и не позволяет им разойтись на макроскопические расстояния.

Закон площади в разложении сильной связи.

Покажем, схематически, как получить закон площади а пределе сильной связи. Поскольку реберные переменные непосредственно связаны с калибровочными полями, в решеточной калибровочной теории их можно выбрать в качестве основных динамических степеней свободы. Это позволяет записать (6.47) в виде "функционального" интеграла[4]:

$$W(C) = \frac{1}{Z}\prod_{m,\mu} dU(n, n+\hat{\mu}) SpU(x,x;C) \exp\left\{-\frac{1}{2g^2}\sum_p SpU_p\right\} \tag{6.52}$$

где

$$Z = \frac{1}{Z}\prod_{m,\mu} dU(n, n+\hat{\mu}) \exp\left\{-\frac{1}{2g^2}\sum_p SpU_p\right\} \tag{6.53}$$

Отметим, что здесь не нужно добавлять к действию никаких членов фиксирующих калибровку, поскольку реберная переменная изменяется в ограниченной области. Соответственно, объем пространства траекторий, порождаемых калибровочными преобразованиями, конечен. Поэтому, до перехода к непрерывному пределу не возникает необходимости вводить члены фиксации калибровки.

Реберные переменные, как мы видели выше, являются элементами группы $SU(3)$. Унитарные матрицы группы $SU(3)$ параметризуются восемью обобщенными углами Эйлера, так что можно записать групповые интегралы в (6.52), (6.53) в явном виде, выразив их через эти углы. Мы этого делать не будем, а лишь приведем следующие условия ортогональности [11]:

$$\int dU(n, n+\hat{\mu})[U(n, n+\hat{\mu})]_{ij} = 0$$

$$\int dU(n, n+\hat{\mu})[U(n, n+\hat{\mu})]_{ij}[U^+(n, n+\hat{\mu})]_{kl} = \frac{1}{3}\delta_{il}\delta_{jk} \tag{6.54}$$

$$\int dU(n, n+\hat{\mu})[U(n, n+\hat{\mu})]_{ij}[U(n, n+\hat{\mu})]_{kl} = 0 \tag{6.55}$$

Условия (6.55) означают, что при вычислении интегралов, определяющих (6.52), только вклады от ребер (связей) решетки, проходимых в противоположных направлениях дают ненулевой вклад. Таким образом, если имеются два соседних плакета одинаковой ориентации, то после интегрирования по переменной, определенной на их общем ребре, они "сливаются" в один прямоугольник, как это показано на Рис.6-4.

В пределе сильной связи величина $\frac{1}{g^2}$ рассматривается в качестве малого параметра. Поэтому экспоненту в (6.52) можно разложить в ряд:

$$W(C) = \frac{1}{Z}\prod_{n,\mu}\int dU(n, n+\hat{\mu}) SpU(x,x;C)\left[1 - \frac{1}{2g^2}\sum_p SpU_p + \right.$$

[4] На решетке это просто многократный интеграл!

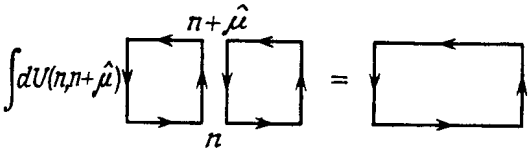


Рис. 6-4

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2g^2}\right)^2\sum_p\sum_{p'}SpU_pSpU_{p'}+\ldots\Bigg] \tag{6.56}$$

Для простоты рассмотрим опять прямоугольный контур C. Согласно формулам (6.55) в этом разложении отличен от нуля интеграл только от такого члена в разложении экспоненты по $\frac{1}{g^2}$, для которого плакеты целиком заполняют поверхность, натянутую на данный контур. Только в этом случае каждое ребро в групповом интеграле встречается дважды (или ни одного раза), причем один раз в положительном, а другой раз в отрицательном направлении, так что все групповые интегралы по реберным переменным оказываются отличными от нуля. Таким образом, неисчезающий вклад в $W(C)$ наинизшего порядка дает член, пропорциональный $\left(\frac{1}{g^2}\right)^{N_p}$, где N_p – минимальное число плакетов, необходимых для того, чтобы заполнить поверхность, ограниченную контуром C:

$$W(C)\sim\left(\frac{1}{g^2}\right)^{N_p} \tag{6.57}$$

Это соответствует закону площади, поскольку площадь поверхности, ограниченной контуром C, равна:

$$A(C)=a^2N_p \tag{6.58}$$

Следовательно

$$W(C)\sim(g^2)^{-A(C)/a^2}=\exp\{-(TR\ln g^2)/a^2\} \tag{6.59}$$

Сравнивая это выражение с (6.49) и (6.51), получаем линейно растущий потенциал вида:

$$E(R)=KR\qquad\text{где}\qquad K=\frac{1}{a^2}\ln g^2 \tag{6.60}$$

что соответствует $g^2(a)\sim e^{Ka^2}$.

Можно также рассмотреть разложение слабой связи для вильсоновской петли, переходя к непрерывному пределу и заменяя действие гауссовским приближением. В этом случае для петли получается *закон периметра*, который, как оказывается, соответствует кулоновскому потенциалу $E(R)\sim\frac{1}{R}$.

Означает – ли все это, что мы доказали свойство конфайнмента? Нет, не означает! Например, все наши рассуждения можно повторить и для абелевой $U(1)$ теории, мы нигде не использовали свойство неабелевости $SU(3)$. Режимы сильной и слабой связи могут быть разделены одним или несколькими фазовыми переходами, происходящими при изменении константы связи g. Общего доказательства отсутствия таких переходов в КХД нет. Однако проблема всесторонне исследовалась численно, методами Монте - Карло. Соответствующие вычисления показали, что в КХД фазовые переходы, в области промежуточных значений g, отсутствуют.

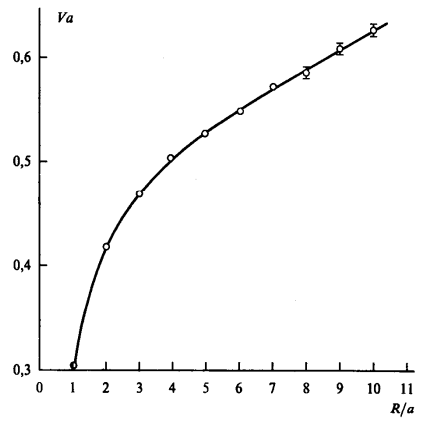


Рис. 6-5

Зависимость $g^2(a) \sim e^{Ka^2}$ из (6.60) (область сильной связи) непрерывно переходит в области слабой связи в асимптотически свободное поведение $g^2(a) \sim \frac{1}{\ln a^{-1}}$, справедливую при $a \to 0$. Потенциал взаимодействия кварков, следующий из этих расчетов хорошо аппроксимируется суперпозицией кулоновского потенциала, доминирующего на малых расстояниях и линейно растущего потенциала, определяющего свойство конфайнмента на больших расстояниях: $V(R) = \frac{C}{R} + KR$. Типичный результат таких вычислений показан на Рис.6-5 [55], где приводится потенциал, действующий между двумя статическими кварками, вычисленный на решетке 32^4, с ребром $a = 0.055fm$. Сплошной линией показана подгонка к суперпозиции кулоновского и линейного потенциалов. Ясно видно, что линейный рост $V(R)$ имеет место на расстояниях $R > 0.25fm$. На меньших расстояниях доминирует пертурбативная динамика (асимптотическая свобода). Типичное значение коэффициента натяжения струны, следующее из этих расчетов $K \approx 0.2GeV^2 \approx 1.0GeVfm^{-1} \approx 14$ тонн! Эффективно это доказывает свойство конфайнмента в КХД, лежащее в основе стандартной модели. Подробности Монте - Карло расчетов в решеточных теория поля хорошо описаны в обзорах [53, 54]. Там же можно найти и описание других применений решеточных моделей, в частности, ранние попытки расчета масс реальных адронов, рассматриваемых как связанные состояния кварков и глюонов. Современное состояние вопроса с аналитическими моделями конфайнмента можно изучить по обзору [55].

Исследование решеточных моделей является сейчас одним из наиболее важных и активно развивающихся направлений квантовой теории поля. Не имея возможности для более подробного описания современных достижений этого направления, приведем лишь, в качестве примера, результаты Монте - Карло расчетов спектра легких адронов, показанные на Рис.6-6[5], и демонстрирующие очень приличное согласие с экспериментом.

Свойство конфайнмента не является абсолютным, при некоторой достаточно высокой температуре T_c (температуре деконфайнмента), или при достаточно высокой его плотности, должен происходить фазовый переход из фазы адронной материи в фазу кварк – глюонной плазмы [47]. Физическая причина этого достаточно ясна.

[5] S.Aoki et al. ArXiv: hep-lat/9904012

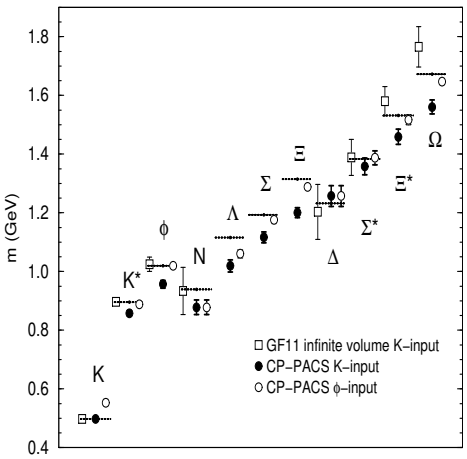


Рис. 6-6

Если Λ – характерный масштаб импульсов, характеризующий переход к асимптотически свободному поведению, то при $T \gg \Lambda$ передаваемый импульс в процессах взаимодействия будет (почти всегда) удовлетворять неравенству $Q^2 \gg \Lambda^2$. Соответственно, будет применима теория возмущений. Но в пертурбативном подходе к КХД кварки и глюоны являются физическими состояниями теории. Это означает, что при $T \gg \Lambda$ мы имеем почти идеальный газ кварков и глюонов (кварк – глюонную плазму). Значение такого фазового перехода очень велико для решения ряда задач астрофизики нейтронных звезд и космологии. Экспериментально это явление может наблюдаться при столкновениях тяжелых ядер, в частности, первые указания на его наблюдение были получены в экспериментах в CERN в 2000 году. Величину T_c вычисляли методом Монте - Карло в решеточной КХД. Типичные значения, получающееся в таких расчетах, сводятся к T_c, лежащей в интервале 0.15-0.20 MeV. Детальный обзор фазовых переходов в КХД можно найти в [56].

Эффективный потенциал и петлевое разложение.

Понятие эффективного потенциала является весьма полезным при рассмотрении теорий со спонтанно нарушенной симметрией. Оно дает возможность рассматривать эти теории по существу так же, как теории с ненарушенной симметрией, и вычислять квантовые поправки к классической картине спонтанного нарушения симметрии, рассмотренной выше.

Опять рассмотрим простейший случай скалярного поля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi) \qquad V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{4!}\varphi^4 \qquad S[\varphi] = \int d^4x \mathcal{L} \tag{6.61}$$

Лагранжиан инвариантен относительно $\varphi \to -\varphi$, однако в случае спонтанного нарушения симметрии таким свойством не обладает решение уравнения

$$\frac{dV}{d\varphi}|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \tag{6.62}$$

где $\varphi_0 \neq 0$. Это видно уже из проведенного выше классического анализа.

Квантовые поправки, как мы видели, возникают из петлевого разложения, а расходимости, которые они содержат, делают необходимой перенормировку. Условия перенормировки формулировались выше в терминах 1ЧН-функций $\Gamma^{(n)}$. Производящим функционалом для функций $\Gamma^{(n)}(x_1, ..., x_n)$ является *эффективное действие* $\Gamma(\varphi)$, определенное в (2.149). Смысл этого названия прояснится ниже.

Производящий функционал для связных диаграмм $W[J]$ определяется согласно (2.130) как:

$$e^{iW[J]} =< 0|0 >_J \tag{6.63}$$

Тогда классическое поле φ_c (в присутствие источника J) определяется из (2.150):

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{< 0|\varphi(x)|0 >_J}{< 0|0 >_J} \tag{6.64}$$

Вакуумное среднее значение $< \varphi >$ есть, по определению:

$$< \varphi >= \lim_{J \to 0} \varphi_c \tag{6.65}$$

Согласно (2.149) эффективное действие $\Gamma[\varphi_c]$ равно:

$$\Gamma(\varphi_c) = W[J] - \int dx J(x)\varphi_c(x) \tag{6.66}$$

и, в соответствии с (2.150), оно удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\delta\Gamma[\varphi_c]}{\delta\varphi_c(x)} = -J(x) \tag{6.67}$$

При $J(x) \to 0$ величина φ_c превращается в константу, равную $< \varphi >$, так что вакуумное среднее от φ является решением уравнения:

$$\frac{d\Gamma[\varphi_c]}{d\varphi_c}|_{<\varphi>} = 0 \tag{6.68}$$

Обычное разложение функционала $\Gamma[\varphi_c]$ по степеням φ_c записывается в виде:

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 ... dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, ..., x_n)\varphi_c(x_1)...\varphi_c(x_n) \tag{6.69}$$

или, что эквивалентно, в импульсном представлении:

$$\Gamma[\varphi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dp_1 ... dp_n \delta(p_1 + ... + p_n)\Gamma^{(n)}(p_1, ..., p_n)\varphi_c(p_1)...\varphi_c(p_n) \tag{6.70}$$

Альтернативным является разложение $\Gamma[\varphi_c]$ по полю φ_c и его производным вида:

$$\Gamma[\varphi_c] = \int dx \{-U(\varphi_c(x))\} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_c)^2 Z(\varphi_c(x)) \tag{6.71}$$

В этом случае, функция (не функционал!) $U(\varphi_c)$ называется *эффективным потенциалом*. Ниже мы увидим, что в классическом пределе он просто совпадает с потенциалом $V(\varphi)$. В случае, когда $\varphi_c(x) =< \varphi >= \varphi = const$, все члены последнего разложения, за исключением первого, обращаются в нуль, так что:

$$\Gamma[\varphi] = -\Omega U(\varphi) \tag{6.72}$$

где Ω – полный объем, занимаемый полем в пространстве – времени. Сравнивая (6.70) и (6.71), имеем:

$$U(\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n \Gamma^{(n)}(p_i = 0) \tag{6.73}$$

Условия нормировки, накладываемые на величины $\Gamma^{(2)}(p_i = 0)$ и $\Gamma^{(4)}(p_i = 0)$ могут быть переформулированы в терминах потенциала U:

$$\frac{d^2U(\varphi_c)}{d^2\varphi_c}|_{<\varphi>} = m^2 \tag{6.74}$$

$$\frac{d^4U(\varphi_c)}{d^4\varphi_c}|_{<\varphi>} = g \tag{6.75}$$

Кроме того, условие (6.68) для вакуумного среднего принимает вид:

$$\frac{dU(\varphi_c)}{d\varphi_c}|_{<\varphi>} = 0 \tag{6.76}$$

С целью изучения свойств теории со спонтанным нарушением симметрии, удобно определить новое поле φ':

$$\varphi' = \varphi - <\varphi> \tag{6.77}$$

вакуумное среднее от которого равно нулю.

Заметим, что поскольку все расходимости теории поглощены контрчленами до того, как были наложены условия нормировки (6.74), (6.75), очевидно, что в теории со спонтанным нарушением симметрии не содержатся новые расходимости, сверх тех, которые имеются в теории с ненарушенной симметрией, так что структура расходимостей в перенормируемой теории поля не затрагивается спонтанным нарушением симметрии.

Займемся вычислением эффективного потенциала. Используем (6.66) и начнем с вычисления функционала $W[J]$ методом перевала. Напомним, что такое метод перевала, на примере обычного интеграла вида:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-f(x)} \tag{6.78}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет минимум в некоторой точке x_0. Тогда имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + ... \tag{6.79}$$

так что можно написать:

$$I \approx e^{-f(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x-x_0)f''(x_0)} \tag{6.80}$$

и задача свелась к известному нам гауссову интегралу, который уже легко считается.

Восстанавливая постоянную Планка в определении функционала $W[J]$, имеем:

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi,J]} \tag{6.81}$$

где

$$S[\varphi, J] = \int d^4x[\mathcal{L}(\varphi) + \hbar\varphi(x)J(x)] \tag{6.82}$$

Из (6.61) и (6.62) следует равенство:

$$\frac{\delta S[\varphi, J]}{\delta\varphi(x)}|_{\varphi_0} = \hbar J(x) \tag{6.83}$$

При $J \to 0$ это сводится к условию экстремальности действия. Разложим действие в окрестности φ_0:

$$\begin{aligned} S[\varphi, J] = S[\varphi_0, J] + \int dx[\varphi(x) - \varphi_0]\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}|_{\varphi_0} + \\ + \int dx \int dy \frac{1}{2}[\varphi(x) - \varphi_0]\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}|_{\varphi_0}[\varphi(y) - \varphi_0] + ... = \\ = S[\varphi_0] + \hbar\int dx[\varphi(x) - \varphi_0]J(x) + \frac{1}{2}\int dx \int dy[\varphi(x) - \varphi_0]\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}|_{\varphi}[\varphi(y) - \varphi_0] + ... \end{aligned} \tag{6.84}$$

где использовали (6.83). Выполняя функциональное дифференцирование, можно убедиться, что:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}|_{\varphi_0} = -[\Box + V''(\varphi_0)]\delta(x - y) \tag{6.85}$$

Если положить $\varphi' = \varphi - \varphi_0$, то разложение (6.84) принимает вид:

$$S[\varphi, J] = S[\varphi_0, J] + \hbar\int dx\varphi'(x)J(x) - \frac{1}{2}\int dx\varphi'(x)[\Box + V''(\varphi_0)]\varphi'(x) + ... \tag{6.86}$$

Подстановка этого выражения в (6.81) для использования метода перевала дает (пишем здесь вместо φ' просто φ):

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0, J]\int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}\int dx\varphi[\Box + V''(\varphi_0)]\varphi\right\}\right\} \tag{6.87}$$

где опущен вклад второго члена из (6.86), поскольку в дальнейшем подразумевается переход к пределу $J \to 0$. Чтобы получить петлевое разложение (эквивалентное, как мы видели, разложению по $\hbar$), заменим $\varphi \to \hbar^{1/2}\varphi$, исключая таким образом $\hbar$ из второй экспоненты в (6.87). Перейдем в интеграле в этой экспоненте к евклидову пространству, так что исчезнет еще и мнимая единица i. Теперь при вычислении функционального интеграла используем обычную формулу гауссова интегрирования и получим:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W\right) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0, J]\right\}(Det[\Box + V''(\varphi_0)])^{-1/2} \tag{6.88}$$

Используя соотношение $DetA = \exp Sp \ln A$, получаем:

$$W[J] = S[\varphi_0] + \hbar \int dx \varphi_0(x) J(x) + \frac{i\hbar}{2} Sp \ln[\Box + V''(\varphi_0)] \tag{6.89}$$

Это выражение дает $W[J]$ с учетом однопетлевой квантовой поправки, члены $O(\hbar^2)$ опущены. Теперь можно подставить (6.89) в (6.66). Но сначала выразим $S[\varphi_c]$ через $S[\varphi_0]$. Полагая $\varphi_0 = \varphi_c - \varphi_1$, имеем:

$$\begin{aligned} S[\varphi_0] = S[\varphi_c - \varphi_1] &= S[\varphi_c] - \int dx \varphi_1(x) \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)}|_{\varphi_c} + \ldots \\ &= S[\varphi_c] - \hbar \int dx \varphi_1(x) J(x) + \ldots \end{aligned} \tag{6.90}$$

Тогда подстановка (6.89) и (6.90) в (6.66) в пределе $J \to 0$ дает:

$$\Gamma[\varphi_c] = S[\varphi_c] + \frac{i\hbar}{2} Sp \ln[\Box + V''(\varphi_0)] \tag{6.91}$$

– эффективное действие с учетом однопетлевой квантовой поправки. Пусть теперь $\varphi_c(x) = \varphi = const$. Тогда $\Gamma[\varphi]$ определяется (6.72), а из (6.61) следует $S[\varphi] = -\Omega V(\varphi)$. Соответственно, из (6.91) получаем эффективный потенциал вида:

$$U(\varphi) = V(\varphi) - \frac{i\hbar}{2} \Omega^{-1} Sp \ln[\Box + V''(\varphi)] \tag{6.92}$$

Отсюда видим, что при $\hbar \to 0$ (в классическом пределе) эффективный потенциал просто совпадает с классическим потенциалом $V(\varphi)$, а эффективное действие (6.91) переходит в классическое (6.61). Поскольку шпур оператора сводится к сумме (интегралу) по всем собственным значениям, можно (после перехода к евклидову импульсному пространству) переписать (6.92) в виде:

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= V(\varphi) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln[k_E^2 + V''(\varphi)] = \\ &= V(\varphi) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \ln\left(k_E^2 + m^2 + \frac{1}{2} g \varphi^2\right) \end{aligned} \tag{6.93}$$

Выражения такого типа можно использовать для изучения вопроса о спонтанном нарушении симметрии с учетом квантовых поправок. В использовавшемся нами выше классическом приближении при $m^2 > 0$ вакуум был невырожденным, а при $m^2 < 0$ возникало вырождение и спонтанное нарушение симметрии (фазовый переход). Что будет с учетом квантовых поправок, в частности при $m^2 = 0$? Из однопетлевого выражения для эффективного потенциала следует возникновение нетривиального минимума при $\varphi \neq 0$ и при $m^2 = 0$ – происходит спонтанное нарушение, индуцированное квантовыми поправками. К сожалению, однопетлевое приближение недостаточно для полного исследования этой задачи [8, 11]. Более подробно с формализмом эффективного потенциала, его связью с группой перенормировок и другими аспектами теории можно познакомиться по обзору [57].

Рассмотренное выше петлевое разложение, являющееся, фактически, разложением по степеням $\hbar$, а не по степеням константы связи g, претендует в этом смысле на выход за рамки теории возмущений. Однако это не совсем так! В классической теории g сама по себе несущественна. Проще всего это понять, если перейти к $\varphi' = g\varphi$. Тогда лагранжиан теории φ^4 может быть переписан как:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi' \partial^\mu \varphi' - \frac{1}{2} m^2 \varphi'^2 - \varphi'^4\right) \tag{6.94}$$

Таким образом g вообще не появляется в классических уравнениях движения и, казалось бы, ее значение несущественно. Это, конечно, не так в квантовой теории и дело тут, как раз, в появлении $\hbar$. Дело в том, что в квантовом случае всегда фигурирует отношение:

$$\frac{1}{\hbar}\mathcal{L} = \frac{1}{g^2\hbar}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi'\partial^\mu\varphi' + ...\right) \tag{6.95}$$

и существенным параметром является $g^2\hbar$. Поэтому, квазиклассическое приближение (малые $\hbar$), фактически, тесно связано с приближением слабой связи (малые g).

Инстантоны в квантовой механике.

Нетривиальные непертурбативные эффекты в квантовой могут возникать даже при малых значениях константы связи, когда, казалось бы никаких сомнений в применимости теории возмущений быть не может. Однако это не всегда так! Даже в области малых значений константы связи могут существовать явления, для описания которых теория возмущений совершенно неадекватна[6]. Примером может служить описание эффектов квантовомеханического туннелирования.

Начнем с обычной квантовой механики. Рассмотрим частицу единичной массы, движущуюся в одномерном потенциале:

$$H = \frac{1}{2}p^2 - V(x) \tag{6.96}$$

Ниже мы получим известные результаты квантовой механики, но достаточно необычным способом, который в дальнейшем удобно обобщить на случай квантовой теории поля.

Евклидовы интегралы по траекториям.

Рассмотрим евклидову (мнимое время!) версию фейнмановского интеграла по траекториям:

$$< x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i >= \mathcal{N}\int [dx]e^{-S/\hbar} \tag{6.97}$$

Здесь $|x_i>$ и $|x_f>$ – собственные состояния оператора координаты частицы, H – ее гамильтониан. Меру интегрирования, обозначавшуюся выше как $\mathcal{D}x$, теперь обозначаем $[dx]$, величину T считаем положительной.

Введем, как обычно, полный набор собственных состояний гамильтониана:

$$H|n >= E_n|n > \tag{6.98}$$

и запишем:

$$< x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i >= \sum_n e^{-E_nT/\hbar} < x_f|n >< n|x_i > \tag{6.99}$$

Тогда в пределе $T \to \infty$ здесь остается только вклад основного состояния.

[6] В последующем изложении мы следуем, в основном, лекциям Коулмэна [58], более подробно с этими проблемами можно познакомиться по прекрасной книге [59]

В правой части (6.97) стоит евклидово действие:

$$S = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V \right] \tag{6.100}$$

Интегрирование $[dx]$ осуществляется по всем траекториям, подчиненным граничным условиям: $x(-T/2) = x_i$, $x(T/2) = x_f$. Подробнее, если $\bar{x}(t)$ – данная функция, удовлетворяющая таким условиям, то произвольная функция, удовлетворяющая тем же условиям, может быть записана в виде:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \sum_n c_n x_n(t) \tag{6.101}$$

где $x_n(t)$ образуют полную систему ортонормированных функций, обращающихся в нуль на границах:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt x_n(t) x_m(t) = \delta_{nm} \qquad x_n(\pm T/2) = 0 \tag{6.102}$$

Тогда меру $[dx]$ можно определить как:

$$[dx] = \prod_n (2\pi\hbar)^{-1/2} dc_n \tag{6.103}$$

Очевидно, что таким образом мы "переберем" все траектории, а от фейнмановского определения данное отличается только нормировочным множителем.

Правую часть (6.97) нетрудно сосчитать в квазиклассическом приближении (малые $\hbar$!). Основной вклад в действие дают тогда точки вблизи экстремальной траектории, определяемой из:

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{x}} = -\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + V'(\bar{x}) = 0 \tag{6.104}$$

– евклидова уравнения Ньютона. Выберем x_n в виде собственных функций второй вариационной производной действия S на $\bar{x}$:

$$-\frac{d^2 x_n}{dt^2} + V''(\bar{x}) x_n = \lambda_n x_n \tag{6.105}$$

Вывод (6.105) сводится к следующему. Аналогично рассмотрению, проведенному в самом начале Главы 2 части I, первая вариация действия, при варьировании траектории $x \to x + a$, в данной задаче сводится к:

$$\delta S = -a \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[-m \frac{d^2 x}{dt^2} + V'(x) \right] dt = 0 \qquad \text{при} \qquad x = \bar{x} \tag{6.106}$$

откуда и следует закон Ньютона (6.104). Если здесь снова проварьировать $x \to \bar{x} + a$, то получим:

$$\delta^2 S = -a \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{d^2(\bar{x}+a)}{dt^2} + V(\bar{x}+a) \right] = -a \int_{-T/2}^{T/2} dt [-\ddot{\bar{x}} - \ddot{a} + V'(\bar{x}) + V''(\bar{x}) a] =$$

$$= -a \int_{-T/2}^{T/2} dt [-\ddot{a} + V''(\bar{x})] \tag{6.107}$$

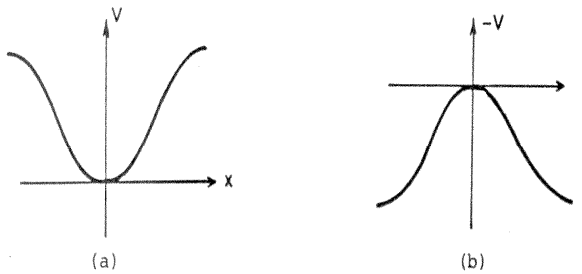


Рис. 6-7

где при переходе к последнему равенству использовали уравнение движения (6.104). Тогда условие $\delta^2 S > 0$ (при произвольном a) дает

$$-m\frac{d^2a}{dt^2} + V''(\bar{x})a > 0 \tag{6.108}$$

что эквивалентно (6.105).

Тогда, в пределе малых $\hbar$, после подстановки (6.101) в (6.100), ограничиваемся квадратичными отклонениями траекторий от классической $\bar{x}$, так что интегралы по c_n становятся гауссовыми, и мы находим:

$$< x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i >= \mathcal{N}e^{-S(\bar{x})/\hbar}\prod_n \lambda_n^{-1/2}[1+O(\hbar)] =$$
$$= \mathcal{N}e^{-S(\bar{x})/\hbar}\left[Det(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2}[1+O(\hbar)] \tag{6.109}$$

Если существует несколько стационарных точек действия, то их вклады нужно просуммировать.

Заметим теперь, что евклидово уравнение движения (6.104) эквивалентно обычному ньютоновскому уравнению для частицы единичной массы, движущейся в потенциале *минус* V! Для такого уравнения имеем интеграл движения:

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 - V(\bar{x}) \tag{6.110}$$

Рассмотрим потенциал V, изображенный на Рис.6-7(а). Пусть $x_i = x_f = 0$. Инвертированный потенциал изображен на Рис.6-7(б). Очевидно, что единственное решение классических уравнений движения в этом потенциале, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид:

$$\bar{x} = 0 \tag{6.111}$$

– частица покоится на вершине. Для этого решения имеем $S = 0$. Тогда из (6.109) имеем:

$$< 0|e^{-HT/\hbar}|0 >= \mathcal{N}[Det(-\partial_t^2 + \omega^2)]^{-1/2}[1+O(\hbar)] \tag{6.112}$$

где нули обозначают переход из начала координат в начало координат, а $\omega^2 = V''(0)$ – квадрат частоты малых колебаний вблизи минимума потенциала V. Можно показать [58], что при больших T:

$$\mathcal{N}[Det(\partial_t^2 + \omega^2)]^{-1/2} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/2} e^{-\omega T/2} \tag{6.113}$$

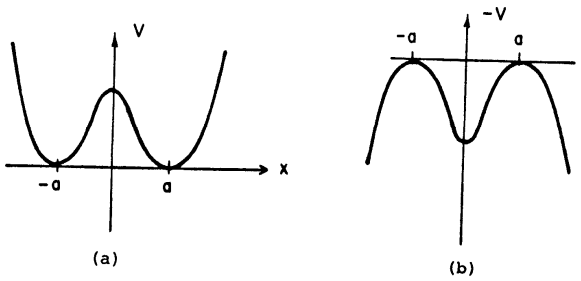


Рис. 6-8

Тогда из (6.112) и рассуждений вокруг (6.99) сразу видим, что энергия основного состояния, в рассматриваемой задаче, есть:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega[1 + O(\hbar)] \tag{6.114}$$

т.е. энергия осциллятора, совершающего нулевые колебания вблизи минимума V. Вероятность частице пребывать в начале координат, когда она находится в основном состоянии, равна:

$$| < x = 0|n = 0 > |^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}[1 + O(\hbar)] \tag{6.115}$$

Это всем известные результаты квазиклассического приближения квантовой механики. Собственно говоря, из такого соответствия сразу ясна справедливость (6.113). Физика дела тоже вполне ясна – в пределе малых $\hbar$ частица находится в основном состоянии гармонического осциллятора, вблизи начала системы координат.

Двухъямный потенциал и инстантоны.

Рассмотрим теперь более интересный пример – двухъямный потенциал, изображенный на Рис.6-8(a). В этом случае имеем $V(x) = V(-x)$, причем минимумы потенциала расположены в точках $x = \pm a$. Введем также $\omega^2 = V''(\pm a)$ – квадрат частоты калссических колебаний частицы вблизи минимумов. Рассчитаем следующие амплитуды перехода:

$$< -a|e^{-HT/\hbar}| - a >=< a|e^{-HT/\hbar}|a > \tag{6.116}$$

$$< a|e^{-HT/\hbar}| - a >=< -a|e^{-HT/\hbar}|a > \tag{6.117}$$

аппроксимируя интеграл по траекториям квазиклассикой, в духе проведенного только что рассмотрения частицы в одной яме. В качестве первого шага нужно опять найти решения классических евклидовых уравнений движения (6.104), удовлетворяющие нужным граничным условиям. Существует два очевидных решения – когда частица все время пребывает на вершине правого или левого холма Рис.6-8(b). Однако есть и более интересное решение – когда частица стартует с одной из вершин (например левой) в момент времени $-T/2$, а затем перекатывается на правую вершину к моменту $+T/2$ ($T \to \infty$). В этом случае мы имеем дело с решениями

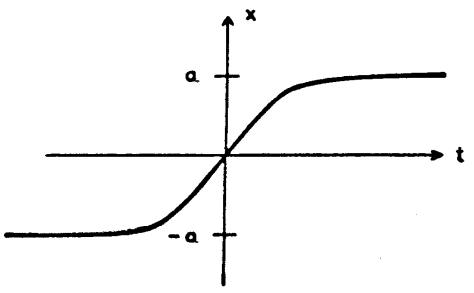


Рис. 6-9

уравнений движения с $E = 0$ (поскольку $E = 0$ в начальном состоянии $x = \pm a$). Соответственно (см. (6.110)):

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sqrt{2V}, \tag{6.118}$$

и решение этого уравнения имеет вид:

$$t = t_1 + \int_0^x dx' \frac{1}{\sqrt{2V}} \tag{6.119}$$

где t_1 – константа интегрирования (время, при котором $x = 0$). Это решение, очевидно, имеет вид, показанный на Рис.6-9. Такое решение называется *инстантоном*[7], центрированным в точке t_1. Зеркально симметричное решение можно назвать антиинстантоном. Важно подчеркнуть, что инстантон обладает *конечным* действием:

$$S_0 = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 + V \right] = \int_{-T/2}^{T/2} dt \left(\frac{d\bar{x}}{dt} \right)^2 = \int_{-a}^{a} dx \sqrt{2V} \tag{6.120}$$

где использовали (6.118). При больших t имеем $\bar{x} \to a$, так что (6.118) можно аппроксимировать как:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sqrt{\omega^2 (\bar{x} - a)^2} = \omega (a - x) \tag{6.121}$$

так что при больших t:

$$(a - x) \sim e^{-\omega t} \tag{6.122}$$

– инстантон "локализован во времени" (на временах $\sim \frac{1}{\omega}$), что и поясняет происхождение названия.

Ясно, что при больших T не только инстантон и антиинстантон являются решениями уравнений движения, но приближенными решениями являются также и цепочки из хорошо разделенных инстантонов и антиистантонов. Пример такой конфигурации показан на Рис.6-10, где имеется n объектов (инстантонов или антиинстантонов), центрированных в точках $t_1, ..., t_n$:

$$\frac{T}{2} > t_1 > t_2 > ... > t_n > -\frac{T}{2} \tag{6.123}$$

Соответственно, в интеграле по траекториям необходимо просуммировать вклады от всех таких конфигураций.

[7] Происхождение этого названия связано с очевидной аналогией с солитоном, но подчеркивает, что речь идет о решении евклидовых уравнений движения.

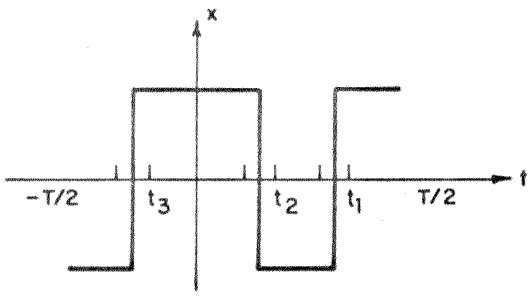


Рис. 6-10

Перейдем к счету! Для n хорошо отделенных объектов, очевидно, имеем вклад в действие $S = nS_0$, что дает в функциональном интеграле вклад $\sim \exp(-nS_0)$. Детерминант сосчитать сложнее. Рассмотрим оператор временной эволюции e^{-HT} как произведение операторов, связанных с эволюцией между точками, где центрированы инстантоны и антиинстантоны. Если бы их не было, то на всей временной оси мы имели бы $V'' = \omega^2$ и получили бы тот же результат, что и выше, для одноямного потенциала (6.113):

$$\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \tag{6.124}$$

Интервалы, на которых расположены инстантоны и антиинстантоны вносят поправку, которую запишем как:

$$\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} K^n \tag{6.125}$$

где K определим из условия, чтобы эта формула давала правильный ответ для случая одного инстантона. Позже мы найдем соответствующее явное выражение. А пока заметим, для учета всех возможных вкладов в интеграл по траекториям нужно проинтегрировать по произвольным положениям центров:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-T/2}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{T^n}{n!} \tag{6.126}$$

Нужно еще учесть, что у нас нет полной свободы для расстановки инстантонов и антиинстантонов. Например, если мы стартуем с $-a$, первый объект, который может повстречаться, должен быть инстантоном, следующий – антиинстантоном и т.д. Если при этом мы возвращаемся в $-a$, то n должно быть четным, наоборот, если мы хотим перейти в $+a$, n должно быть нечетным. Таким образом получаем:

$$< -a|e^{-HT/\hbar}| - a >= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{\text{Четные } n} \frac{(Ke^{-S_0/\hbar}T)^n}{n!}[1 + O(\hbar)], \tag{6.127}$$

тогда как $< a|e^{-HT/\hbar}| - a >$ дается таким же выражением, но с суммой по нечетным n. Суммы вполне тривиальны и мы получаем:

$$< \pm a|e^{-HT/\hbar}| - a >= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \frac{1}{2}[\exp(Ke^{-S_0/\hbar}T) \mp \exp(-Ke^{-S_0/\hbar}T)] \tag{6.128}$$

Вспоминая (6.99)

$$< x_f|e^{-HT/\hbar}|x_i >= \sum_n e^{-E_nT/\hbar} < x_f|n >< n|x_i >, \tag{6.129}$$

понимаем, что два наинизших уровня системы обладают энергиями:

$$E_\pm = \frac{1}{2}\hbar\omega \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar} \tag{6.130}$$

Если обозначить соответствующие состояния $|+>$ и $|->$, видим, что:

$$|< +|\pm a >|^2 = |< -|\pm a >|^2 =< a|- >< -|-a >= - < a|+ >< +|-a >= \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/2} \tag{6.131}$$

Это хорошо известные результаты квантовой механики [29]: происходит расщепление уровня в двухъямном потенциале за счет туннелирования (снятие вырождения между уровнями в двух минимумах). Разность энергий при этом $\sim e^{-S_0/\hbar}$. Нижнее состояние $|->$ – четная комбинация волновых функций, соответствующих частице, локализованной в каждой из ямок (первое возбужденное состояние $|->$ – нечетная комбинация).

Теперь займемся расчетом фактора K. Для этого нужно изучить свойства решений уравнения (6.105):

$$-\frac{d^2x_n}{dt^2} + V''(\bar{x})x_n = \lambda_n x_n \tag{6.132}$$

где $\bar{x}$ представляет собой одноинстантонное решение. Поскольку имеется инвариантность относительно сдвига по времени (центр инстантона может быть расположен в произвольной точке на оси времени), это уравнение обязательно обладает собственной функцией с собственным значением равным нулю (нулевая трансляционная мода). Явный вид этой функции:

$$x_1 = S_0^{-1/2}\frac{d\bar{x}}{dt} \tag{6.133}$$

Нормировочный фактор здесь возникает из (6.120):

$$\int dt \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 = S_0 \tag{6.134}$$

В существовании нулевой моды легко убедиться следующим образом. Инстантон $\bar{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (6.104)

$$-\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + V'(\bar{x}) = 0 \tag{6.135}$$

Но $\bar{x}(t+T)$, где T произвольно, есть снова решение этого уравнения:

$$-\frac{d^2\bar{x}(t+T)}{dt^2} + V'(\bar{x}(t+T)) = 0 \tag{6.136}$$

Дифференцируя это уравнение по T, получаем

$$-\frac{d^2x_1}{dt^2} + V''(\bar{x})x_1 = 0 \tag{6.137}$$

что и доказывает наше утверждение относительно (6.133).

Существование нулевой моды с $\lambda_1 = 0$, казалось бы, приводит к проблеме. Если мы будем считать гауссов интеграл вблизи экстремальной траектории (инстантона) так, как это описано в связи с (6.101), (6.103) и (6.109), то при интегрировании по c_1 мы получим расходимость! Фактически, однако, мы уже проделали соответствующее интегрирование, когда интегрировали по центрам инстантонов (антиинстантонов) в (6.126). В самом деле, изменение $x(t)$ при небольшом сдвиге центра инстантона t_1 равно:

$$dx = \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right) dt_1 \tag{6.138}$$

В тоже время, соответствующее изменение за счет изменения коэффициента разложения c_1 в (6.101) есть:

$$dx = x_1 dc_1 \tag{6.139}$$

Тогда, записывая в (6.138) $\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right) dt_1 = \sqrt{S_0} x_1 dt_1$, и сравнивая это с (6.139), получаем $dc_1 = \sqrt{S_0} dt_1$, или:

$$(2\pi\hbar)^{-1/2} dc_1 = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} dt_1 \tag{6.140}$$

где $\hbar$ введена для обезразмеривания нормировочного множителя. Поэтому при вычислении детерминанта, связанного с гауссовским интегрированием, в выражении типа (6.109) не нужно включать нулевое собственное значение, но зато нужно включить в K множитель $\left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2}$. Поэтому, одноинстантонный вклад в матричный элемент перехода дается выражением:

$$< a|e^{-HT/\hbar}| - a >_{1inst} = \mathcal{N} T \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-S_0/\hbar} [Det'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))]^{-1/2} \tag{6.141}$$

где штрих над знаком детерминанта означает, что при вычислении этого детерминанта опускается нулевое собственное значение. Сравнивая (6.141) с одноинстантонным вкладом в (6.127),находим:

$$K = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar}\right)^{1/2} \left| \frac{Det(-\partial_t^2 + \omega^2)}{Det'(-\partial_t^2 + V''(\bar{x}))} \right|^{1/2} \tag{6.142}$$

Это завершает наш расчет!

Сделаем некоторые замечания по поводу проделанных вычислений:

1. Можно убедиться, что полученные результаты совпадают со стандартными выводами квантовой механики [29].

2. Мы полагали, что все $\lambda_n > 0$ (кроме $\lambda_1 = 0$). Это действительно так, поскольку наинизшее состояние x_1, как легко видеть из его явного вида, не имеет нулей, как и должно быть у одномерного уравнения Шредингера. Это ясно из того, что рассмотренный инстантон является монотонно возрастающей (антиинстантон – убывающей) функцией t, тогда его производная $x_1 \sim \frac{d\bar{x}}{dt}$ не имеет нулей.

3. Коэффициент K пропорционален $\hbar^{-1/2}$, что связано с вкладом нулевой моды. Это, на самом деле, общее правило – каждая нулевая мода (а их может быть и несколько!) дает множитель $\hbar^{-1/2}$.

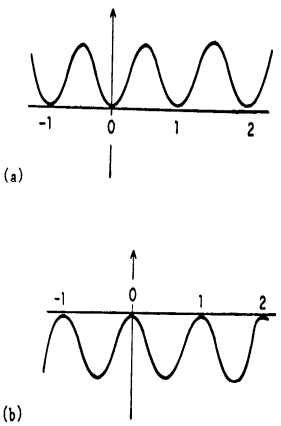


Рис. 6-11

Аналогичным образом можно проанализировать и задачу о частице в периодическом потенциале, показанном на Рис.6-11. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что теперь отсутствует условие чередования инстантонов и антиинстантонов, что связано с существованием множества эквивалентных минимумов потенциала. В тоже время, полное число инстантонов минус полное число антиинстантонов должно, в этом случае, равняться изменению $\bar{x}$ между начальной и конечной координатами. Тогда, вместо (6.128), можно написать:

$$< j_+ |e^{-HT/\hbar}| j_- >= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\bar{n}=0}^{\infty} \frac{1}{n!\bar{n}!}(Ke^{-S_0/\hbar}T)^{n+\bar{n}}\delta_{n-\bar{n}-j_++j_-} \tag{6.143}$$

где n – число инстантонов, а $\bar{n}$ – число антиинстантонов. Используем теперь:

$$\delta_{ab} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i\theta(a-b)} \tag{6.144}$$

чтобы переписать (6.143) как:

$$< j_+ |e^{-HT/\hbar}| j_- >= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \exp[2KTK\cos\theta e^{-S_0/\hbar}T)] \tag{6.145}$$

В этом случае мы имеем континуум собственных значений энергии частицы (зону!), параметризованных "углом" θ:

$$E(\theta) = \frac{1}{2}\hbar\omega + 2Ke^{-S_0/\hbar}\cos\theta \tag{6.146}$$

Матричные элементы:

$$< \theta|j >= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} (2\pi)^{-1/2} e^{ij\theta} \tag{6.147}$$

представляют собой, по сути дела, соответствующую блоховскую волну.

Инстантоны и метастабильные состояния.

Рассмотрим потенциал, изображенный на Рис.6-12(a). Если бы было можно пренебречь туннелированием, то существовало бы связанное состояние вблизи начала координат. Перевернутый потенциал показан на Рис.6-12(b). Классические уравнения движения имеют очевидное решение, соответствующее частице, стартующей на вершине холма при $x = 0$, которая затем отражается от классической точки поворота σ и возвращается обратно на вершину, как показано на Рис.6-13. Посчитаем

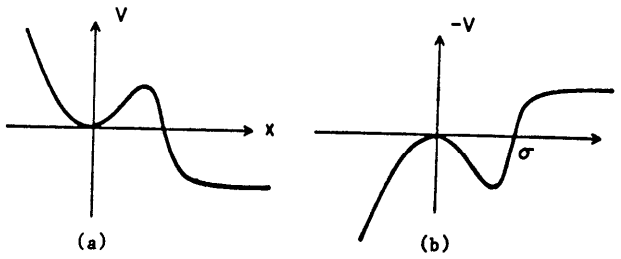


Рис. 6-12

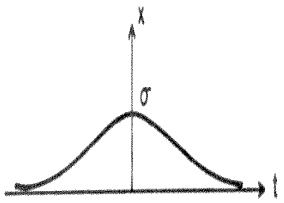


Рис. 6-13

матричный элемент перехода из $x = 0$ в $x = 0$, суммируя по всем состоящим из удаленных друг от друга инстантонов Рис.6-13. Тут, вроде бы, надо делать все как и выше (с очевидным переопределением S_0, ω^2 и т.п.), однако без ограничений на четность числа инстантонов. Тогда при суммировании "набирается" полная экспонента:

$$< 0|e^{-HT/\hbar}|0 >= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \exp[KTe^{-S_0/\hbar}] \tag{6.148}$$

и собственное значение энергии основного состояния есть:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar K e^{-S_0/\hbar} \tag{6.149}$$

Но это неверно! Фактически, в этой ситуации есть туннелирование и возникает нестабильное состояние! Из вида инстантона Рис.6-13 ясно, что собственная функция $x_1 \sim \frac{d\bar{x}}{dt}$ имеет нуль и не может быть функцией, соответствующей наинизшей энергии. Но ее то энергия равна нулю, это значит, что существует еще состояние с $\lambda_0 < 0$ и собственной функцией, не имеющей нулей. Поэтому фактор K, в который входит корень из произведения собственных значений, есть *мнимая* величина. Поэтому, на самом деле, таким способом получается:

$$ImE_0 = \frac{\Gamma}{2} \sim \hbar|K|e^{-S_0/\hbar} \tag{6.150}$$

что отвечает *ширине уровня*, соответствующей метастабильному состоянию.

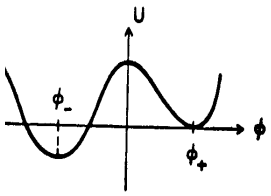


Рис. 6-14

Инстантоны и нестабильный вакуум в теории поля.

Рассмотрим теперь скалярную теорию поля с евклидовым действием:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + U(\phi)\right] \tag{6.151}$$

где потенциал $U(\phi)$ показан на Рис.6-14: имеется два неэквивалентных минимума ϕ_+ и ϕ_-, причем ϕ_- – абсолютный минимум. Выберем начало отсчета энергии так, чтобы $U(\phi_+) = 0$. В квантовой теории минимум при $\phi = \phi_+$ играет роль "ложного" (метастабильного) вакуума. Описание распада такого "ложного" вакуума во многом аналогично описанию процесса зародышеобразования в статистической физике (например, при кристаллизации пересыщенного раствора или вскипании перегретой жидкости). В квантовой теории поля эта задача интересна с точки зрения применений к задачам космологии [43]. Кто сказал, что *наш вакуум* является устойчивым, а не метастабильным?

Наша задача состоит в расчете величины $\frac{\Gamma}{V}$ – вероятности распада метастабильного вакуума в единицу времени и в расчете на единичный объем. Прежде всего, нужно найти соответствующий инстантон $\bar{\phi}$, как решение евклидовых уравнений движения:

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\phi} = U'(\bar{\phi}) \tag{6.152}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\lim_{x_4 \to \pm\infty} \bar{\phi}(\mathbf{x}, x_4) = \phi_+ \tag{6.153}$$

Нетрудно понять, что для обеспечения конечности действия на инстантоне должно также выполняться условие:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \to \infty} \bar{\phi}(\mathbf{x}, x_4) = \phi_+ \tag{6.154}$$

Если инстантон найден, то в ведущем приближении по $\hbar$ имеем:

$$\frac{\Gamma}{V} = K e^{-S_0} \tag{6.155}$$

где $S_0 = S(\bar{\phi})$, а предэкспонента K определяется соответствующим детерминантом.

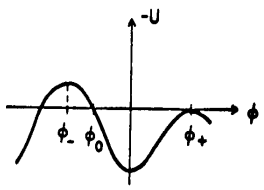


Рис. 6-15

Тривиальное решение $\bar{\phi} = \phi_+$ неинтересно, для него $\frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2}$ не имеет отрицательных собственных значений, так что вклад в распад вакуума не возникает. Уравнения (6.152) – (6.154) инвариантны относительно преобразований группы четырехмерных вращений $O(4)$. Полагаем, что инстантон тоже $O(4)$ инвариантен[8], так что соответствующее $\bar{\phi}$ является функцией только от радиус - вектора r. Тогда уравнение (6.152) сводится к:

$$\frac{d^2\bar{\phi}}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\bar{\phi}}{dr} = U'(\bar{\phi}) \tag{6.156}$$

а из (6.153) и (6.154) следует:

$$\lim_{r\to\infty} \bar{\phi}(r) = \phi_+ \tag{6.157}$$

Очевидно также, что нужно потребовать:

$$\frac{d\bar{\phi}}{dr}|_{r=0} = 0, \tag{6.158}$$

иначе $\bar{\phi}$ будет сингулярно в начале координат.

Уравнение (6.156) можно интерпретировать, как уравнение движения (считая r временем!) частицы, движущейся в потенциале *минус* U, показанном на Рис.6-15, и под действием зависящей от времени силы трения ($\sim \frac{1}{r}\times$ скорость). Частица стартует из состояния покоя (ср.(6.158)) в момент времени $r = 0$ и, при надлежащем выборе начальной позиции, останавливается при $r \to \infty$ в точке ϕ_+ – такое движение и соответствует инстантону. Очевидно, что это решение существует:

- Частица, отпущенная правее ϕ_0 не доедет до ϕ_+, для этого ей не хватит энергии из-за трения.
- Если мы правильно выберем начальную точку левее ϕ_0, но правее ϕ_-, мы можем добиться, что при больших r частица подойдет к ϕ_+ и там остановится.

В самом деле, для ϕ вблизи ϕ_- мы можем линеаризовать уравнение движения и записать его в виде:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d}{dr} - \mu^2\right)(\bar{\phi} - \phi_-) = 0 \tag{6.159}$$

где $\mu^2 = U''(\phi_-)$. Это уравнение достаточно легко решается [58], и решение выражается через модифицированную функцию Бесселя. Тогда видно, что если мы выберем $\bar{\phi}(0)$ достаточно близко к ϕ_-, мы можем добиться, что и при больших

[8] Это предположение можно строго обосновать – сферически симметричный инстантон обладает наименьшим действием.

r частица останется сколь - угодно близко к ϕ_-. Но для достаточно больших r можно пренебречь трением, поскольку оно $\sim 1/r$. Но если трения нет, то частица перекатится через горку с вершиной в ϕ_+. Это означает, что в нашей задаче всегда существует промежуточная точка (между ϕ_- и ϕ_0), стартуя с которой частица при $r \to \infty$ остановится в ϕ_+.

Пусть $U_+(\phi)$ – некоторая четная функция ϕ:

$$U_+(\phi) = U_+(-\phi) \tag{6.160}$$

с минимумом в точках $\pm a$:

$$U'_+(\pm a) = 0 \tag{6.161}$$

Определим

$$\mu^2 = U''_+(\pm a) \tag{6.162}$$

Добавим к U_+ маленькую добавку, нарушающую симметрию минимумов:

$$U = U_+ + \varepsilon(\phi - a)/2a \qquad \varepsilon > 0 \tag{6.163}$$

Это просто конкретизирует вид нашего потенциала. В первом порядке по ε имеем:

$$\phi_\pm = \pm a \tag{6.164}$$

Величина ε определяет разность энергий между истинным и "ложным" вакуумом. Выберем начальную позицию частицы $\bar{\phi}(0)$ очень близко к ϕ_-. Тогда частица остается вблизи ϕ_- до какого-то большого момента времени $r = R$, а после этого она быстро проходит через долину и медленно приближается к ϕ_+ при $r \to \infty$. Таким образом наш инстантон выглядит как большой четырехмерный сферически симметричный "пузырь" радиуса R с тонкой стенкой, разделяющий "ложный" вакуум ϕ_+ (вне пузыря) и истинный вакуум ϕ_- (внутри пузыря). Соответственно, наш пузырь (инстантон) представляет собой зародыш нового (истинного) вакуума внутри метастабильного ("ложного") вакуума.

Для $r \sim R$ можно пренебречь трением, а также ε – зависящим членом в U. Тогда уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2\bar{\phi}}{dr^2} = U'_+(\bar{\phi}) \tag{6.165}$$

что представляет собой классическое уравнение движения частицы в двухъямном потенциале, которое подробно анализировалось выше. Оно имеет своим решением известный уже нам простейший одномерный инстантон Рис.6-9 (который описывает переход из $-a$ в $+a$ при росте r через момент "времени" R). Таково приближенное описание инстантона в рассматриваемой полевой задаче.

Но мы еще не определили R. Действие на инстантоне имеет вид:

$$S = 2\pi^2 \int_0^\infty dr r^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{\phi}}{dr}\right)^2 + U(\bar{\phi})\right] \tag{6.166}$$

Этот интеграл разбивается на три области интегрирования: вне пузыря, вблизи его поверхности и внутри. Снаружи можно считать $\bar{\phi} = \phi_+$ и $U = 0$, так что этот вклад в интеграл просто равен нулю (что, кстати, обеспечивает конечность действия на

инстантоне). Внутри пузыря имеем $\bar{\phi} = \phi_-$, $U = -\varepsilon$, так что соответствующий вклад в интеграл есть:

$$-\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \varepsilon \tag{6.167}$$

Вблизи поверхности пузыря, т.е. при $r \sim R$, можно пренебречь членом $\sim \varepsilon$ в U, так что интеграл сводится к:

$$2\pi^2 R^3 \int dr \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{\phi}}{dr}\right)^2 + U_+\right] = 2\pi^2 R^3 S_1 \tag{6.168}$$

где

$$S_1 = \int_{-a}^{a} d\phi \sqrt{2U_+} \tag{6.169}$$

– действие одномерного инстантона (6.120). В итоге получаем:

$$S = -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \varepsilon + 2\pi^2 R^3 S_1 \tag{6.170}$$

Определим теперь R из условия экстремальности действия:

$$\frac{dS}{dR} = -2\pi^2 R^3 \varepsilon + 6\pi^2 R^2 S_1 = 0 \tag{6.171}$$

что дает:

$$R = \frac{3S_1}{\varepsilon} \tag{6.172}$$

Тогда имеем[9]:

$$S_0 = \frac{27\pi^2 S_1^4}{2\varepsilon^3} \tag{6.173}$$

Величину радиуса пузыря (6.172) можно найти на основе элементарных энергетических соображений, применяемых в теории критических зародышей – выигрыш энергии в объеме пузыря должен скомпенсировать проигрыш, связанный с поверхностной энергией стенок:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \varepsilon = 4\pi R^2 \sigma \qquad \text{что и дает} \qquad R = \frac{3\sigma}{\varepsilon} \tag{6.174}$$

где σ – поверхностная энергия стенки. В нашем случае $\sigma = S_1$.

В итоге, для вероятности распада "ложного" вакуума получаем:

$$\frac{\Gamma}{V} \sim \exp(-S_0) \tag{6.175}$$

Детерминанты и перенормировка.

Предэкспоненциальный множитель в (6.175) следует определить тем же способом, что и в рассмотренной выше квантовомеханической задаче. Но тут есть важные отличия и вопросы:

1. В квантовой механике существовала только одна нулевая трансляционная мода, здесь их четыре.

[9]Наше рассмотрение справедливо в пределе малых ε и в пределе, когда радиус пузыря много больше толщины его стенки: $R \gg \mu^{-1}$, что сводится к условию $3S_1\mu \gg \varepsilon$.

2. Нам было весьма существенно, что существовало только одно отрицательное собственное значение, приводившее к возникновению мнимого вклада. Так ли это в рассматриваемой задаче?

3. В квантовой теории поля существуют ультрафиолетовые расходимости и нужно проводить перенормировку. Какова их роль здесь?

Рассмотрим сначала вопрос о нулевых модах. В рассматриваемой задаче имеется четыре направления трансляций инстантона (он может быть расположен в любой точке четырехмерного евклидова пространства), соответственно существует четыре собственные функции дифференциального оператора, связанного со второй вариационной производной действия, с нулевыми собственными значениями. Эти функции $\sim \partial_\mu \bar{\phi}$. Условие их нормировки сводится к:

$$\int d^4x \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \bar{\phi} = \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} \int d^4x \partial_\mu \bar{\phi} \partial^\mu \bar{\phi} = \delta_{\mu\nu} S_0 \tag{6.176}$$

В результате в предэкспоненте (6.175) возникает четыре множителя $\left(\frac{S_0}{2\pi}\right)^{1/2}$ вместо одного.

Доказательство последнего равенства в (6.176) сводится к следующему. Рассмотрим $\phi_\lambda(x) = \bar{\phi}(x/\lambda)$. Тогда действие:

$$S(\phi_\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi})^2 + \lambda^4 \int d^4x U(\bar{\phi}) \tag{6.177}$$

Поскольку $\bar{\phi}$ является решением уравнений движения, должно выполняться условие стационарности действия (6.177) при $\lambda = 1$. Это дает:

$$\int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi})^2 = -4 \int d^4x U(\bar{\phi}) \tag{6.178}$$

или

$$S_0 = \frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi})^2 > 0 \tag{6.179}$$

Итак, мы получаем предэкспоненциальный фактор в виде:

$$K = \frac{S_0^2}{4\pi^2} \left| \frac{Det'[-\partial_\mu \partial_\mu + U''(\bar{\phi})]}{Det[-\partial_\mu \partial_\mu + U''(\phi_+)]} \right|^{-1/2}, \tag{6.180}$$

в предположении, что с отрицательными собственными значениями и перенормировкой проблем не возникает.

Что касается отрицательных собственных значений, то это действительно так. Понятно, что $\frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2}$ (на инстантоне) имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение. Можно *строго* показать, что более одного отрицательного собственного значения в этой задаче не возникает [58]. Поэтому (6.175) действительно дает вероятность распада.

Проблему проведения перенормировки (6.175) мы подробно обсуждать не будем. В принципе, достаточно ясно, что в теориях с перенормируемым $U(\varphi)$, все выражения, включая (6.180), можно переписать через перенормированные величины и сделать, таким образом, конечными. Некоторые дополнительные подробности можно найти в [58].

Пузырь, расширяющийся в реальном пространстве – времени Минковского, можно получить аналитическим продолжением инстантона:

$$\phi(x_0, \mathbf{x}) = \bar{\phi}(r = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - x_0^2}) \tag{6.181}$$

Таким образом, при малых ε имеем тонкую стенку при $r = R$, разделяющую два вакуума, а при расширении пузырь удовлетворяет уравнению:

$$|\mathbf{x}|^2 - x_0^2 \approx R^2 \tag{6.182}$$

Величина R определяется, как мы видели, параметрами теории и является некоторой микроскопической длиной. Тогда уравнение (6.182) означает, что расширяющаяся поверхность пузыря летит практически со скоростью света ($v \sim 1$)! При этом стенка переносит энергию (в расчете на единицу площади) $\frac{S_1}{\sqrt{1-v^2}}$. К моменту, когда радиус пузыря достигает $|\mathbf{x}|$, энергия стенки становится равной:

$$E_{wall} = \frac{4\pi|\mathbf{x}|^2 S_1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{6.183}$$

Из (6.182) легко найти, что:

$$v = \frac{d|\mathbf{x}|}{dt} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}} \tag{6.184}$$

Тогда энергия стенки есть:

$$E_{wall} = \frac{4\pi|\mathbf{x}|^3 S_1}{R} = \frac{4\pi\varepsilon|\mathbf{x}|^3}{3} \tag{6.185}$$

так что практически вся энергия, высвобождающаяся при распаде "ложного" вакуума идет на ускорение стенки. Никаких частиц при этом не рождается, с обеих сторон стенки пребывает соответствующий вакуум. Таким образом, "наблюдатель" никогда не узнает, что на него налетела такая стенка, в этом случае он тоже "распадется" за соответствующее микроскопическое время.

Примеры использования рассмотренного формализма к задачам релятивистской космологии можно найти в книге [43].

Концепция инстантонов играет большую роль во многих задачах квантовой теории поля и статистической физики. В качестве примера, упомянем снова теорию $g\varphi^4$ с $g < 0$ и с числом компонент поля $n = 0$, описывающую, как отмечалось в предыдущей Главе, движение электрона в случайном поле примесей. В этой теории с неустойчивым, с точки зрения теории поля, основным состоянием существуют инстантонные решения, которые определяют вид такой важнейшей характеристики электронной системы, как плотность электронных состояний в области так называемого ее "хвоста", вызванного локализацией электронов флуктуациями случайного потенциала[10].

Особое значение имеют нетривиальные инстантонные решения в неабелевых калибровочных теориях, где они тесно связаны с топологическими свойствами калибровочных преобразований и сложной структурой янг - миллсовского вакуума [24, 58, 59]. У нас нет возможности обсуждать здесь эти важнейшие аспекты теории и их значение для физики элементарных частиц (КХД). Подробное изложение теории можно найти в книге [59], а обзор применений к задачам КХД дан в [60].

[10] М.В.Садовский. УФН **133**, 223 (1981), И.М.Суслов. УФН **168**, 503 (1998)

Библиография

[1] В.Б.Берестецкий. Е.М.Лифшиц. Л.П.Питаевский. Квантовая электродинамика. "Наука", М, 1980

[2] А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. "Наука", М, 1969

[3] Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Квантовые поля. "Наука", М, 1980

[4] Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М, 1976

[5] С.Швебер, Г.Бете, Ф.Гофман. Мезоны и поля, т.1, ИЛ, М, 1957

[6] С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИЛ, М, 1963

[7] Д.Бьеркен, С.Дрелл. Релятивистская квантовая теория поля, т.1,2. "Наука", М, 1978

[8] Л.Райдер. Квантовая теория поля. "Мир", М, 1987

[9] П.Рамон. Теория поля. "Мир", 1984

[10] К.Ициксон, Ж.Зюбер. Квантовая теория поля, т.1,2. "Мир", М, 1981

[11] Т.Ченг, Л.Ли. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. "Мир", М, 1987

[12] К.Хуанг. Кварки, лептоны и калибровочные поля. "Мир", М, 1985

[13] А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, М, 1963

[14] Ш.Ма. Современная теория критических явлений. "Мир", М, 1980

[15] D.Amit. Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena. McGraw - Hill, NY, 1978

[16] Л.Б.Окунь. Физика элементарных частиц. "Наука", М, 1988

[17] К.Готтфрид, В.Вейскопф. Концепции физики элементарных частиц. "Мир", М, 1988

[18] Ф.Хелзен, А.Мартин. Кварки и лептоны. "Мир", М, 1987

[19] Д.Перкинс. Введение в физику высоких энергий. "Энергоатомиздат", М, 1991

[20] Г.Кейн. Современная физика элементарных частиц. “Мир”, М, 1990

[21] Л.Б.Окунь. УФН **168**, 625 (1998)

[22] Я.Б.Зельдович. УФН **86**, 303 (1965)

[23] В.И.Захаров, Б.Л.Иоффе, Л.Б.Окунь. УФН **117**, 227 (1975)

[24] А.М.Поляков. Калибровочные поля и струны. ИТФ им. Л.Д.Ландау, 1995

[25] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. “Наука”, М, 1973

[26] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика. “Наука”, М, 1973

[27] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Релятивистская квантовая теория. Часть 2. “Наука”, М, 1971

[28] Элементарные частицы и компенсирующие поля. Под ред. Д.Д.Иваненко. “Мир”, М, 1964

[29] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. “Наука”, М, 1974

[30] Нильс Бор и развитие физики. Под ред. В.Паули. ИЛ, М, 1958

[31] Р.Фейнман. Квантовая электродинамика. “Мир”, М, 1964

[32] В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. “Наука”, М, 1967

[33] Дж.Чью. Аналитическая теория S-матрицы. “Мир”, М, 1968

[34] В.Б.Берестецкий. Проблемы физики элементарных частиц. “Наука”, М, 1979

[35] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. Часть 1. “Наука”, М, 1976

[36] Е.Уитеккер, Г.Ватсон. Курс современного анализа, т.1. Физматгиз, М, 1963

[37] Р.Фейнман, А.Хибс. Квантовая механика и интегралы по траекториям. “Мир”, М, 1968

[38] Р.Фейнман. Статистическая механика. “Мир”, М, 1975

[39] А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. Флуктуационная теория фазовых переходов. “Наука”, М, 1982

[40] А.Н.Васильев. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и в стохастической динамике. ПИЯФ, СПб, 1998

[41] Ф.А.Березин. Метод вторичного квантования. “Наука”, М, 1965

[42] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. Статистическая физика. Часть 2. “Наука”, М, 1978

[43] А.Д.Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. “Наука”, М, 1990

[44] А.Д.Долгов, Я.Б.Зельдович, М.В.Сажин. Космология ранней Вселенной. МГУ, М, 1988

[45] A.V.Smilga. Lectures on the Foundations of QCD. ArXiv: hep-ph/9901412

[46] K.Rajagopal, F.Wilczek. The Condensed Matter Physics of QCD. ArXiv: hep-ph/0011333

[47] F.Wilczek. QCD in Extreme Conditions. ArXiv: hep-ph/0003183

[48] F.Wilczek. The Future of Particle Physics as a Natural Science. ArXiv: hep-ph/9702371

[49] М.Кройц. Кварки, глюоны и решетки. "Мир", М, 1987

[50] J.B.Kogut. Rev.Mod.Phys. **51**, 659 (1979)

[51] М.Фишер. Природа критического состояния. "Мир", М, 1968

[52] Г.Стенли. Фазовые переходы и критические явления. "Мир", М, 1973

[53] В.А.Казаков. В кн. "Эксперимент на дисплее", "Наука", М, 1989

[54] Ю.М.Макеенко. УФН **143**, 161 (1984)

[55] Ю.А.Симонов. Конфайнмент. УФН **166**, 337 (1966)

[56] H.Meyer-Ortmanns. Rev.Mod.Phys. **68**, 473 (1996)

[57] J.Illiopoulos, C.Itzykson, A.Martin. Rev.Mod.Phys. **47**, 165 (1975)

[58] S.Coleman. The Uses of Instantons. In "The Whys of Subnuclear Physics", Ed. by A.Zichichi. Plenum Press, NY, 1979

[59] Р.Раджараман. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. "Мир", М, 1985

[60] T.Schäfer, E.V.Shuryak. Rev.Mod.Phys. **70**, 323 (1998)